ゲーム理論と最適化手法

第 15 回 アドバンスドトピック - 学校選択制度

上田 俊

佐賀大学理工学部
知能情報システム学科

Email: sgrueda@cc.saga-u.ac.jp
Web: https://www.fu.is.saga-u.ac.jp/sgrueda/

February 4, 2020

論文紹介

タイトル School Choice: A Mechanism Design Approach
(学校選択制度: 制度設計論的アプローチ)

著者 Atila Abdulkadiroğlu and Tayfun Sönmez

学術雑誌 American Economic Review

- 経済学において，最も高名な学術雑誌のひとつ

掲載年 2003

アウトライン

1. イントロダクション
2. 準備
3. 既存の学校選択制度
   - ボストン学生割当メカニズム
   - コロンバス学生割当メカニズム
4. 提案メカニズム
   - 望ましい性質
   - ゲイル-シャプレイ学生最適安定メカニズム
   - Top Trading Cycles メカニズム

学校選択制度

- 学校選択制度 (school choice)
  - 親に彼らの子供が通う学校を選択する機会を与える制度
- 通常は住んでいる地域ごとに決められた公立学校に割り当てられる.
  - 裕福な家庭であれば，良い学校のある地域に引っ越しするか，私立学校に入学させることができる.
  - そうでない場合，そのような選択肢はない.

学校選択制度における課題

- 学生割当メカニズムの設計が中心的な課題
  - すべての学生を最も好きな学校に割り当てることは不可能
- 教育界は厳密な学生割当メカニズムの必要性を協調
  - しかし，設計の指針は与えられているものの，特定のメカニズムではない．
  - 明確な手順のない制度が運用されていることもある．
- 厳密でない手順は，学生とその親が学校選択制度を利用しない，「回避行動」をとる原因になる．

既存メカニズムの問題点

- ボストン等で行われている学校選択制度は明確な手順のもとで行われている．
- しかし，これらの手順には重大な欠点がある．
  - 特定の学校で優先度の高い学生が，その学校を最も好むと言わない限り，その優先度を失ってしまう．
  - 非常に複雑な「入学ゲーム」をプレイすることを強いられ，選好を偽ることが最大の関心事になってしまう．
- これらの欠点は学生とその親を混乱させるだけでなく，学校の席の分配が非効率的になる原因となる．

メカニズムデザイン的手法

- メカニズムデザイン (mechanism design，制度設計論) 的な手法を用いて，新しいメカニズムを提案する．
  - ゲーム理論を基礎として，様々な社会制度のためのメカニズムの設計を考える理論
  - 逆ゲーム理論 (inverse game theory) とも呼ばれる．
    - ゲーム理論: ゲームが与えられて，プレイヤーの行動を分析する．
    - メカニズムデザイン: 望ましいプレイヤーの行動を決めて，その行動をとるようにゲームを設計する．
- ゲイル-シャプレイ学生最適安定メカニズム (Gale-Shapley student optimal assignment mechanism) と Top Trading Cycles メカニズムを提案する．

学校選択制度の数学モデル

- $\{i_1, i_2, \ldots\}$: 学生の集合
- $\{s_1, s_2, \ldots\}$: 学校の集合
  - 学校 s は，q_s 個の席を持つ．
- $\succ_i$: 学生 i の学校に対する選好順序 (preference ranking)
  - $s \succ_i s'$ は，学生 i が学校 s を学校 s' より好むことを表す．
- $\succ_s$: 学校 s の学生に対する優先順序 (priority ranking)
  - 数学的には $\succ_i$ と $\succ_s$ は同じ順序だが，学校 s の優先順序 $\succ_s$ は学校が決めるのではなく，法令やその他の条件によって決まる．

例

Example

3 人の学生 i_1, i_2, i_3 がいて，3 つの学校 s_1, s_2, s_3 がある．各学校 s は $q_s = 1$ 個の席を持つ．学校の優先順序と学生の選好順序は以下で与えられる:

$$
\begin{aligned}
s_1&: i_1 \succ_{s_1} i_3 \succ_{s_1} i_2, & i_1&: s_2 \succ_{i_1} s_1 \succ_{i_1} s_3,\\
s_2&: i_2 \succ_{s_2} i_1 \succ_{s_2} i_3, & i_2&: s_1 \succ_{i_2} s_2 \succ_{i_2} s_3,\\
s_3&: i_2 \succ_{s_3} i_1 \succ_{s_3} i_3, & i_3&: s_1 \succ_{i_3} s_2 \succ_{i_3} s_3.
\end{aligned}
$$

既存の学校選択制度

- 既存の学校選択制度より，以下の 2 つを紹介する:
  - ボストン学生割当メカニズム
    - ボストン市で 1999 年より使用されている．
    - フロリダ州，ミネアポリス，シアトル等で使用されている．
  - コロンバス学生割当メカニズム
    - コロンバス市で使用されている
- 上記の情報は論文発表時 (2003 年) の情報

ボストン学生割当メカニズム (1/2)

1. 各学生は学校に対する選好順序を提出する.
2. 以下の階層に従って学校の優先順序を決める:
   1. 兄弟姉妹が同じ学校に通っており徒歩圏内
   2. 兄弟姉妹が同じ学校に通っている
   3. 徒歩圏内
   4. その他

   同じ階層の中の学生は，事前に公開された「くじ」に従って順序付けされる.

ボストン学生割当メカニズム (2/2)

3. 提出された選好順序と優先順序を用いて以下のように学生を割り当てる．

   Round 1 学生が 1 番目に挙げた学校のみを考える．各学校の優先順序に従って，席がなくなるまでその学校を第 1 希望とした学生を割り当てる．

   Round 2 残りの学生を考える．各学校の優先順序に従って，席がなくなるまでその学校を第 2 希望とした学生を割り当てる．

   一般に. . .

   Round k 各学校の優先順序に従って，席がなくなるまでその学校を第 k 希望とした学生を割り当てる．

動作例

Round 1 学生 i_1 が学校 s_2 に割り当てられる．$i_3 \succ_{s_1} i_2$ なので，学生 i_3 が学校 s_1 に割り当てられる．

Round 2 学生 i_2 の第 2 希望は学校 s_2 だが，満員なので誰も割り当てられない．

Round 3 学生 i_2 が学校 s_3 に割り当てられる．

割当結果

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_2 & s_3 & s_1 \end{pmatrix}$$

Example

$$s_1 : i_1 \succ_{s_1} i_3 \succ_{s_1} i_2$$
$$s_2 : i_2 \succ_{s_2} i_1 \succ_{s_2} i_3$$
$$s_3 : i_2 \succ_{s_3} i_1 \succ_{s_3} i_3$$

$$i_1 : s_2 \succ_{i_1} s_1 \succ_{i_1} s_3$$
$$i_2 : s_1 \succ_{i_2} s_2 \succ_{i_2} s_3$$
$$i_3 : s_1 \succ_{i_3} s_2 \succ_{i_3} s_3$$

問題点

- ボストンメカニズムは，「耐戦略性」を満たさない．
  - 嘘の選好を提出することで得できる．
- 右例では，学生 i_2 が自身の選好順序を戦略的に書き換えて提出することで，割当先の学校を s_3 から s_2 できる．
- 学生 i_2 の選好順序を $i_2 \colon s_2 \succ_{i_2} s_1 \succ_{i_2} s_3$ にする．
- $$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_2 & s_3 & s_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_3 & s_2 & s_1 \end{pmatrix}$$

  となる．

Example

$s_1 \colon i_1 \succ_{s_1} i_3 \succ_{s_1} i_2$

$s_2 \colon i_2 \succ_{s_2} i_1 \succ_{s_2} i_3$

$s_3 \colon i_2 \succ_{s_3} i_1 \succ_{s_3} i_3$

$i_1 \colon s_2 \succ_{i_1} s_1 \succ_{i_1} s_3$

$i_2 \colon s_1 \succ_{i_2} s_2 \succ_{i_2} s_3$

$i_3 \colon s_1 \succ_{i_3} s_2 \succ_{i_3} s_3$

コロンバス学生割当メカニズム

1. 各学生は最大 3 つの学校に応募する．
2. いくつかの学校に対して，その学校の通常の割当圏に住んでいる応募学生に席が保証され，そのほかの応募学生に対する優先順序はくじで決められる．残りの学校に対しては，応募学生に対する優先順序はくじで決められる．
3. 各学校において，最も優先順序の高い学生に，空いている席に対する提案が事務局から送られる．そのほかの学生は補欠人名簿に載せられる．学生はその提案を受けるか否か 3 日間の猶予がある．提案を承諾した学生から割り当てていく．

問題点

- 学生のとるべき最適な戦略が不明瞭である.
  - 第 2·3 希望からの提案を承諾するべきか拒否するべきかわからない.
  - そもそも，どの 3 つの学校を選ぶべきか，最適な選び方がわからない.
- コロンバスの各家庭は，極めて重大な問題において，非常に難しい「ゲーム」をプレイすることが強いられている.

提案メカニズム

- 以下の 3 つの望ましいメカニズムの性質を考える:
  - 対戦略性，安定性，パレート効率性
- 提案メカニズムは，それぞれ以下の性質を満たす:
  - ゲイル-シャプレイ学生最適安定メカニズム: 耐戦略性，安定性
  - Top Trading Cycles メカニズム: 耐戦略性，パレート効率性
- 政策決定者 (policy maker) は，耐戦略性を満たすことを前提に，安定性かパレート効率性かのどちらか望む方を満たすメカニズムを採用できる.
  - 安定性とパレート効率性の両方を満たすことは不可能.

耐戦略性

- 直接メカニズム (direct mechanism)
  - 学生の選好順序を直接提出することを要求するメカニズム
- ボストン学生割当メカニズムは直接メカニズムである．
- コロンバス学生割当メカニズムは直接メカニズムではない．
  - 選好順序の提出ではなく，最大 3 つまで希望する学校の応募を要求する．
  - どの学校を希望するかが選好順序に基づく必要はまったくない．
- 耐戦略性 (strategy-proofness)
  - 直接メカニズムの性質，戦略的操作不可能性とも
  - どの学生も偽の選好を提出することによって得することができない．

安定性 (1/2)

Definition (ブロッキングペア)

$s \succ_i s'$ である学生 i が学校 s' に割り当てられているとき，学校 s に割り当てられている学生 i' について $i \succ_s i'$ である場合，(i, s) をブロッキングペアと呼ぶ．

Definition (安定性)

ブロッキングペアのないマッチングは安定性を満たすという．

- 安定なマッチングは必ず存在する．
  - ゲイル-シャプレイ学生最適安定メカニズムが必ず安定なマッチングを求めることから証明できる．

安定性 (2/2)

- 以下のボストン学生割当メカニズムのマッチングでは，(i_2, s_2) がブロッキングペアになる:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_2 & s_3 & s_1 \end{pmatrix}$$

  - $s_2 \succ_{i_2} s_3$ であり，$i_2 \succ_{s_2} i_1$ であるから．
- 以下のマッチングはブロッキングペアがなく，安定なマッチングである:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

Example

$$s_1 : i_1 \succ_{s_1} i_3 \succ_{s_1} i_2$$
$$s_2 : i_2 \succ_{s_2} i_1 \succ_{s_2} i_3$$
$$s_3 : i_2 \succ_{s_3} i_1 \succ_{s_3} i_3$$

$$i_1 : s_2 \succ_{i_1} s_1 \succ_{i_1} s_3$$
$$i_2 : s_1 \succ_{i_2} s_2 \succ_{i_2} s_3$$
$$i_3 : s_1 \succ_{i_3} s_2 \succ_{i_3} s_3$$

パレート効率性 (1/2)

Definition (パレート支配)

あるマッチングに対して，別のマッチングに変わることで，すべての学生が同じかよりよい学校に割り当てられ，少なくとも 1 人の学生がよりよい学校に割り当てられているとき，後者は前者をパレート支配する (Pareto dominate) という．

Definition (パレート効率性)

どのマッチングにもパレート支配されないマッチングをパレート効率的 (Pareto efficient) という．

パレート効率性 (2/2)

- 右のマッチングは左のマッチングをパレート支配する:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_2 & s_1 & s_3 \end{pmatrix} \overset{\text{パレート支配}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

  - $s_2 \succ_{i_1} s_1$, $s_1 \succ_{i_2} s_2$ であり，i_1 と i_2 にとっては左の方がよい.
  - i_3 は s_3 で同じ.
- 左のマッチングは，どのマッチングからもパレート支配されないので，パレート効率的である.

Example

$$s_1 : i_1 \succ_{s_1} i_3 \succ_{s_1} i_2$$
$$s_2 : i_2 \succ_{s_2} i_1 \succ_{s_2} i_3$$
$$s_3 : i_2 \succ_{s_3} i_1 \succ_{s_3} i_3$$

$$i_1 : s_2 \succ_{i_1} s_1 \succ_{i_1} s_3$$
$$i_2 : s_1 \succ_{i_2} s_2 \succ_{i_2} s_3$$
$$i_3 : s_1 \succ_{i_3} s_2 \succ_{i_3} s_3$$

ゲイル-シャプレイ学生最適安定メカニズム

- ゲイル-シャプレイ学生最適安定メカニズムでは，以下のようにして学生を割り当てる:

  Step 1 各学生は第 1 希望の学校に申し込む．各学校は優先順序に従って学生を一時的に受け入れる．受け入れられなかった学生は拒否される．

  一般に. . .

  Step k 前のステップで拒否された学生は次の希望の学校に申し込む．各学校は一時的に受け入れている学生と今回申し込んだ学生を優先順序に従って一時的に受け入れる．受け入れられなかった学生は拒否される．

- すべての学生が一時的に受け入れられたら，それを確定する．

動作例 (1/2)

Step 1 学生 i_1 は学校 s_2 に，学生 i_2, i_3 は学校 s_1 に申し込む．学校 s_1 は学生 i_3 を，学校 s_2 は学生 i_1 を一時的に受け入れる．学生 i_2 は拒否される．

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_2 & & s_1 \end{pmatrix}$$

Step 2 学生 i_2 は学校 s_2 に申し込む．学生 i_2 が一時的に受け入れられ，学生 i_1 が拒否される．

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ & s_2 & s_1 \end{pmatrix}$$

Example

$s_1 : i_1 \succ_{s_1} i_3 \succ_{s_1} i_2$

$s_2 : i_2 \succ_{s_2} i_1 \succ_{s_2} i_3$

$s_3 : i_2 \succ_{s_3} i_1 \succ_{s_3} i_3$

$i_1 : s_2 \succ_{i_1} s_1 \succ_{i_1} s_3$

$i_2 : s_1 \succ_{i_2} s_2 \succ_{i_2} s_3$

$i_3 : s_1 \succ_{i_3} s_2 \succ_{i_3} s_3$

動作例 (2/2)

Step 3 学生 i_1 は学校 s_1 に申し込み，学生 i_1 が一時的に受け入れられ，学生 i_3 が拒否される．

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_1 & s_2 & \end{pmatrix}$$

Step 4 学生 i_3 は学校 s_2 に申し込み，拒否される．

Step 5 学生 i_3 は学校 s_3 に申し込み，一時的に受け入れられる．

割当結果

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

Example

$$s_1 : i_1 \succ_{s_1} i_3 \succ_{s_1} i_2$$
$$s_2 : i_2 \succ_{s_2} i_1 \succ_{s_2} i_3$$
$$s_3 : i_2 \succ_{s_3} i_1 \succ_{s_3} i_3$$

$$i_1 : s_2 \succ_{i_1} s_1 \succ_{i_1} s_3$$
$$i_2 : s_1 \succ_{i_2} s_2 \succ_{i_2} s_3$$
$$i_3 : s_1 \succ_{i_3} s_2 \succ_{i_3} s_3$$

Top Trading Cycles メカニズム

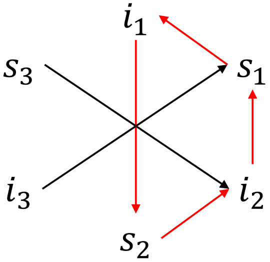
- Top Trading Cycles メカニズムでは，以下のようにして学生を割り当てる:

  Step 1 各学校にあと何席が空いているか示すカウンターを配置する．各学生と学校は，それぞれは最も好む学校と学生を指さす．少なくともひとつサイクルがあるので，サイクルに含まれる学生を指さした先の学校に割り当てる．

  一般に. . .

  Step k まだ割り当てられていない学生とカウンターが残っている学校が，それぞれ残っている中で最も好む学校と学生を指さす．サイクルに含まれる学生を指さした先の学校に割り当てる．

動作例 (1/2)



$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_2 & s_1 & \end{pmatrix}$$

Example

$s_1 : i_1 \succ_{s_1} i_3 \succ_{s_1} i_2$

$s_2 : i_2 \succ_{s_2} i_1 \succ_{s_2} i_3$

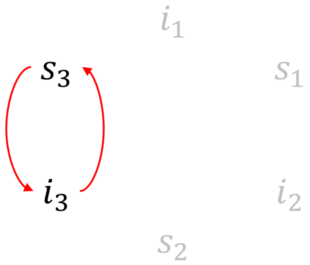
$s_3 : i_2 \succ_{s_3} i_1 \succ_{s_3} i_3$

$i_1 : s_2 \succ_{i_1} s_1 \succ_{i_1} s_3$

$i_2 : s_1 \succ_{i_2} s_2 \succ_{i_2} s_3$

$i_3 : s_1 \succ_{i_3} s_2 \succ_{i_3} s_3$

動作例 (2/2)



$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ s_2 & s_1 & s_3 \end{pmatrix}$$

Example

$s_1 : i_1 \succ_{s_1} i_3 \succ_{s_1} i_2$

$s_2 : i_2 \succ_{s_2} i_1 \succ_{s_2} i_3$

$s_3 : i_2 \succ_{s_3} i_1 \succ_{s_3} i_3$

$i_1 : s_2 \succ_{i_1} s_1 \succ_{i_1} s_3$

$i_2 : s_1 \succ_{i_2} s_2 \succ_{i_2} s_3$

$i_3 : s_1 \succ_{i_3} s_2 \succ_{i_3} s_3$