

ゲーム理論と最適化手法 期末レポート

1 コアと凸ゲーム

コアと凸ゲームに関する以下の問 1~3 に解答せよ。なお、コアと凸ゲームの定義は以下で与えられる。

定義 1 (コア) 提携形ゲーム (N, v) の利得ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ がコアに属するとは、次の 2 つの条件

1. 提携合理性: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N$
2. 全体合理性: $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

が成り立つことである。

定義 2 (凸ゲーム) 提携形ゲーム (N, v) が凸ゲームであるとは、任意の提携 S と T に対して、

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

が成り立つことである。ただし、 $S \cap T = \emptyset$ の場合、 $v(\emptyset) = 0$ とする。

問 1 0-正規化された^{*1}3 人ゲーム (N, v) のコアが非空であるための必要十分条件は、

$$v(\{1, 2\}) + v(\{2, 3\}) + v(\{1, 3\}) \leq 2 \cdot v(\{1, 2, 3\})$$

が成り立つことである。上の条件が成り立つ場合にコアに含まれる利得ベクトルを 1 つ示せ。(10 点)

問 2 0-正規化された 3 人凸ゲームにおいて、問 1 の条件が成り立つことでコアが非空であることを示せ。(10 点)

問 3 利得ベクトル $x = (x_1, \dots, x_n)$ を

$$x_i = v(\{1, \dots, i\}) - v(\{1, \dots, i-1\}), \quad i = 1, \dots, n$$

とする。この利得ベクトル x が n 人凸ゲームのコアに属することで n 人凸ゲームのコアが非空であることを示せ。(10 点)

^{*1} $\forall i \in N, v(\{i\}) = 0$ が成り立つことである。

2 学校選択制度

学校選択制度に関する以下の問 1, 2 に解答せよ。なお、どちらのメカニズムも 4 つの Step を経て最終的な割当を出力する。

問 1 8 人の学生 i_1, \dots, i_8 がいて、4 つの学校 s_1, \dots, s_4 がある。学校 s_1, s_2 は 2 つの席をもち、学校 s_3, s_4 は 3 つの席をもち、学校の優先順序と学生の選好順序は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} s_1: i_1 \succ_{s_1} i_2 \succ_{s_1} i_3 \succ_{s_1} i_4 \succ_{s_1} i_5 \succ_{s_1} i_6 \succ_{s_1} i_7 \succ_{s_1} i_8, \\ s_2: i_3 \succ_{s_2} i_5 \succ_{s_2} i_4 \succ_{s_2} i_8 \succ_{s_2} i_7 \succ_{s_2} i_2 \succ_{s_2} i_1 \succ_{s_2} i_6, \\ s_3: i_5 \succ_{s_3} i_3 \succ_{s_3} i_1 \succ_{s_3} i_7 \succ_{s_3} i_2 \succ_{s_3} i_8 \succ_{s_3} i_6 \succ_{s_3} i_4, \\ s_4: i_6 \succ_{s_4} i_8 \succ_{s_4} i_7 \succ_{s_4} i_4 \succ_{s_4} i_2 \succ_{s_4} i_3 \succ_{s_4} i_5 \succ_{s_4} i_1, \\ \\ i_1: s_2 \succ_{i_1} s_1 \succ_{i_1} s_3 \succ_{i_1} s_4, \\ i_2: s_1 \succ_{i_2} s_2 \succ_{i_2} s_3 \succ_{i_2} s_4, \\ i_3: s_3 \succ_{i_3} s_2 \succ_{i_3} s_1 \succ_{i_3} s_4, \\ i_4: s_3 \succ_{i_4} s_4 \succ_{i_4} s_1 \succ_{i_4} s_2, \\ i_5: s_1 \succ_{i_5} s_3 \succ_{i_5} s_4 \succ_{i_5} s_2, \\ i_6: s_4 \succ_{i_6} s_1 \succ_{i_6} s_2 \succ_{i_6} s_3, \\ i_7: s_1 \succ_{i_7} s_2 \succ_{i_7} s_3 \succ_{i_7} s_4, \\ i_8: s_1 \succ_{i_8} s_2 \succ_{i_8} s_4 \succ_{i_8} s_3. \end{aligned}$$

この問題でゲイル-シャプレイ学生最適安定メカニズムを用いた割当を、各 Step での途中経過とともに示せ。(10 点)

問 2 上記の問題で Top Trading Cycles メカニズムを用いた割当を、各 Step での途中経過とともに示せ。(10 点)