ゲーム理論と確率モデル

第 6 回 協力ゲーム (2) - シャプレイ値

上田 俊

佐賀大学理工学部
知能情報システム学科

Email: sgrueda@cc.saga-u.ac.jp
https://sites.google.com/view/sgrueda/in-japanese

2018 年 11 月 6 日

アウトライン

1. 今後の予定
2. 協力ゲームとコア (再掲)
3. シャプレイ値
   - プレイヤーの限界貢献度
   - シャプレイ値の定義
   - シャプレイ値の性質
   - シャプレイの 4 公理
4. まとめ

今後の予定

- ...
- 第 5 回 (10/30): 協力ゲーム (1) - コアの理論
- 第 6 回 (11/06): 協力ゲーム (2) - シャプレイ値
- 第 7 回 (11/13): アドバンスドトピック (マッチング理論)
- 第 8 回 (11/20): 中間レポート課題 提示
  - 中間試験ではなく，中間レポート課題とする．
  - 詳細 (決定版) はこの回の講義で連絡する．
- 第 9 回 (11/27 $\sim$): 確率モデル (担当: 奥村教授)
- ...

ベンチャー企業ゲーム

- 大学生の A 君，B 君，C 君は卒業後にベンチャー企業を作ろうとしている:
  - 3 人が別々に会社を作ると，A 君は 6 万円，B 君は 4 万円，C 君は 2 万円の日収を得る．
  - 2 人が一緒に会社を作ると，A 君と B 君は総額で 20 万円の日収になる．
    - A 君と C 君なら，15 万円．B 君と C 君なら 10 万円．
  - 3 人で起業すると，総額 24 万円の日収になる．
- 誰と一緒に起業して，どのように利益を分配するのがいいだろうか?

提携形ゲーム

- 提携形ゲーム (coalitional game): (N, v)
  - $N = \{1, 2, \dots, n\}$: プレイヤーの集合
  - $S \subseteq N$: 提携 (coalition)
  - $v: 2^N \to \mathbb{R}$: 特性関数
    - $v(S)$ は提携 S のメンバーが協力して得る利得を表す.
- ベンチャー企業ゲームの (N, v) は以下で与えられる:
  - $N = \{A, B, C\}$
  - $v(\{A\}) = 6, v(\{B\}) = 4, v(\{C\}) = 2,$
    $v(\{A, B\}) = 20, v(\{A, C\}) = 15, v(\{B, C\}) = 10,$
    $v(N) = v(\{A, B, C\}) = 24.$

コア

- 全員で協力して起業するときが最も稼げる.
  - 特性関数が優加法性を満たすと仮定している.
- つまり，全員で 24 万円を分けることになる.

- 誰も協力関係から逸脱することのない安定な配分.
  - $\Rightarrow$ コア (Core)
- 配分 $x = (x_A, x_B, x_C) = (10, 8, 6)$ はコアに属さない.
  - 提携 $\{A, B\}$ がブロックするため.
    - $x(\{A, B\}) = 18 < 20 = v(\{A, B\})$
- 配分 $x' = (11, 9, 4)$ はコアに属する.
  - どの提携も配分 x' をブロックしない.

シャプレイ値

- コアを用いて配分を事前に予測することは困難.
  - コアに属する配分の集合が空や非常に大きくなる場合があるため.
- シャプレイ (Lloyd Stowell Shapley, 1923 - 2016) は公理系から一意に定まる配分を求めた.
  - 彼の名前をとって，シャプレイ値 (Shapley value) と呼ばれる.
  - 右写真は https://ja.wikipedia.org/wiki/ロイド・シャープレー から転載

プレイヤーの限界貢献度

- シャプレイ値は提携に対するプレイヤーの貢献度に基づいて計算される.
  - もともとは 4 つの公理系から導かれる (後述).

- 提携 S と S に含まれないプレイヤー i を考える.
- 提携 S は彼らだけの協力により $v(S)$ を獲得できるが，もし，プレイヤー i が加われば，獲得できる値は $v(S \cup \{i\})$ となる.
- この 2 つの値の差 $(v(S \cup \{i\}) - v(S))$ をプレイヤー i の提携 S に対する限界貢献度 (marginal contribution) と呼ぶ.

限界貢献度の例

- A 君と B 君が協力している時に，C 君が参加する:
  - $v(\{A, B, C\}) - v(\{A, B\}) = 24 - 20 = 4$
- A 君がいるときに B 君が参加する:
  - $v(\{A, B\}) - v(\{A\}) = 20 - 6 = 14$
- B 君がいるときに A 君が参加する (上と逆):
  - $v(\{A, B\}) - v(\{B\}) = 20 - 4 = 16$

ベンチャー企業ゲーム

$v(\{A\}) = 6$
$v(\{B\}) = 4$
$v(\{C\}) = 2$
$v(\{A, B\}) = 20$
$v(\{A, C\}) = 15$
$v(\{B, C\}) = 10$
$v(\{A, B, C\}) = 24$

- 同じ提携に対しても参加順序が異なると貢献度が異なることに注意.

プレイヤーの順列

- シャプレイ値では，全体提携 N を形成するときに，1 人ずつプレイヤーが加わっていくという提携形成を考える．
- n 人のプレイヤーを並べた順列を $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ と表し，$n!$ 個の順列 π の全体を Π とする．
- 順列 π において，プレイヤー i の先に並んでいるプレイヤーの集合を $P^{\pi,i}$ と表す．
  - ただし，プレイヤー i が $\pi(1)$ であるときは，$P^{\pi,i} = \emptyset$ である．
- プレイヤー i の順列 π における貢献度は，

$$v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi,i})$$

で表される．($v(\emptyset) = 0$ である．)

シャプレイ値の定義 (1)

Definition (順列を用いたシャプレイ値の定義)

ゲーム (N, v) において，プレイヤーが 1 人ずつ加わって全体提携が形成される $n!$ 個の順列がすべて同じ確率で起こるとする．このときの各プレイヤーの限界貢献度の期待値を (N, v) におけるシャプレイ値という．プレイヤー i のシャプレイ値 $\phi_i(v)$ は，

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} (v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi,i}))$$

で表される．すべてのプレイヤーのシャプレイ値を並べたベクトル $\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots, \phi_n(v))$ を単にシャプレイ値と呼ぶ．

シャプレイ値の定義 (2)

Definition (限界貢献度の期待値を用いた定義)

シャプレイ値は,

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{S:\ S \subseteq N, i \notin S} |S|!(n - |S| - 1)!(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

とも表現できる.

- プレイヤー i が提携 S に加わって $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ の貢献度を持つのは, $n!$ の順列において,
  - i が加わる前に提携 S が形成しており,
  - i が加わったあとに残りの $N \setminus (S \cup \{i\})$ のメンバーが加わる,

  ときである.
- そのような順列は $n!$ 個のうち, $|S|!(n - |S| - 1)!$ 個ある.

シャプレイ値の例

- 各順列における各プレイヤーの限界貢献度は以下の表でまとまられる:

順列	限界貢献度		
	A	B	C
ABC	6	14	4
ACB	6	9	9
BAC	14	4	4
BCA	14	4	6
CAB	13	9	2
CBA	14	8	2

- 各プレイヤーの列の平均がシャプレイ値になる: $\phi = (11.5, 8, 4.5)$.

ベンチャー企業ゲーム

$v(\{A\}) = 6$
$v(\{B\}) = 4$
$v(\{C\}) = 2$
$v(\{A, B\}) = 20$
$v(\{A, C\}) = 15$
$v(\{B, C\}) = 10$
$v(\{A, B, C\}) = 24$

シャプレイ値は配分か?

- 配分は以下の 2 条件を満たすベクトル $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:
  全体合理性 $x(N) = v(N)$
  個人合理性 $x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N$
- シャプレイ値の (どちらの) 定義でもこれらには言及されていない.
- 一般に，シャプレイ値は全体合理性を満たし，もし特性関数 v が優加法的であれば，個人合理性も満たす.
- 証明してみよう!

証明 - 全体合理性について

- 全プレイヤーのシャプレイ値の和は,
  - $\sum_{i\in N}\phi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{i\in N}(\sum_{\pi\in\Pi}(v(P^{\pi,i}\cup\{i\}) - v(P^{\pi,i})))$.
- 和の取り方の順序を変えると,
  - $\sum_{i\in N}\phi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}(\sum_{i\in N}(v(P^{\pi,i}\cup\{i\}) - v(P^{\pi,i})))$.
- 実は,
  - $\sum_{i\in N}(v(P^{\pi,i}\cup\{i\}) - v(P^{\pi,i})) = v(\{\pi(1)\}) - v(\emptyset) + v(\{\pi(2)+\pi(1)\}) - v(\{\pi(1)\}) + \cdots + v(\{\pi(1),\ldots,\pi(n-1),\pi(n)\}) - v(\{\pi(1),\ldots,\pi(n-1)\}) = v(N)$.
- したがって,
  - $\sum_{i\in N}\phi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi} v(N) = v(N)$. $\square$

証明 - 個人合理性について

- 優加法性: 任意の 2 つの提携 S, T s.t. $S \cap T = \emptyset$ に対して,
  $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$
- $S = P^{\pi,i}$, $T = \{i\}$ とおくと,
  $v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) \geq v(P^{\pi,i}) + v(\{i\})$
  $\Rightarrow v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi,i}) \geq v(\{i\})$
- 最後に,

$$
\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} (v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi,i})), \\
&\geq \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} v(\{i\}), \\
&= v(\{i\}).
\end{aligned}
$$

□

その他もろもろ

- シャプレイ値は，優加法的でなくても任意の i と S に対して $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq 0$ が成り立てば，個人合理性を満たす．
- つまり，負の限界貢献度を持つプレイヤーがいなければよい．
- シャプレイ値がコアに含まれる綺麗な条件は発見されていない．
    - コアが非空であっても，シャプレイ値がコアに含まれるとは限らない．
    - 凸ゲームのシャプレイ値はコアに含まれる．
        - 凸ゲーム: コアが必ず非空なゲーム

シャプレイの 4 公理 - 準備

- もともとシャプレイは，シャプレイ値を 4 つの公理から導いた．
  - 限界貢献度云々の解釈は後付け．
- 以下は，公理の導入に必要な定義:
  - $\mathbb{V}$: 特性関数 $v: 2^N \to \mathbb{R}$ の全体
  - $\psi: \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n$: $v \in \mathbb{V}$ に対して，n 次元の実数ベクトルを与える関数，$\psi(v) = (\psi_1(v), \ldots, \psi_n(v))$ とする．
  - ナルプレイヤー: i の含まれていない任意の提携 S に対して，$v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$ となるプレイヤー
  - 対称: $i \neq j$ について，任意の提携 S に対して，$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup j\})$ となるプレイヤーは，対称である．
  - ゲームの和: 任意の $v, u \in \mathbb{V}$ に対して，$v + u \in \mathbb{V}$ を，$(v + u)(S) = v(S) + u(S)$ とする．

シャプレイ値の定義 (3)

- **全体合理性** 任意の $v \in \mathbb{V}$ に対して，$\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$
- **ナルプレイヤーに関する性質** プレイヤー i がナルプレイヤーであれば，$\psi_i(v) = 0$
- **対称性** 任意の対称なプレイヤー i, j に対して，$\psi_i(v) = \psi_j(v)$
- **加法性** 任意の $v, u \in \mathbb{V}$ に対して，$\psi(v + u) = \psi(v) + \psi(u)$

Definition (公理系を用いた定義)

上記の 4 つの公理を満たす関数 $\psi \colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n$ は，以下で表現される ψ ただ 1 つに定まる:

$$\psi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{S \colon S \subseteq N, i \notin S} |S|!(n - |S| - 1)!(v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

まとめ

- 協力ゲーム: プレイヤーが協力して行動することが可能なとき，その利得の配分を議論するゲーム
- 解概念: 利得配分の方法を定義したもの
  - コア，最小コア
  - 仁
  - シャプレイ値
  - 核，安定集合，...

- 中間レポートについて (暫定版)
  - 2 ～ 3 問の「証明」問題
    - 凸ゲームのコアが非空になること
    - シャプレイ値の公理系からの導出
    - 等々 (どういう形式かは未定，穴埋め?，ヒントだけ?)