ゲーム理論

第5回 協力ゲーム (1) – コアの理論

佐賀大学大学院 工学系研究科
知能情報システム学専攻
上田　俊
Email: sgrueda@cc.saga-u.ac.jp
https://sites.google.com/view/sgrueda/in-japanese

アウトライン

- 提携形ゲーム
  - 特性関数
  - 利得ベクトルと解概念
- コア
  - ブロッキング提携とコア
  - コアの存在条件
- コアの精緻化
  - 不満
  - 最小コア，仁

協力ゲーム

- プレイヤー間で拘束力のある合意が可能な場合のプレイヤーの振る舞いに関する理論
  - プレイヤーがどのような協力関係 (提携) を形成するかという問題 (提携構造形成問題)
  - 提携内で得られた利益 (利得) をどのように配分するかという問題 (提携形ゲームの解概念)

ベンチャー企業ゲーム

- 大学生のA君，B君，C君は卒業後にベンチャー企業を作ろうとしている:
  - 3人が別々に会社を作ると，A君は6万円，B君は4万円，C君は2万円の日収を得る.
  - 2人が一緒に会社を作ると，A君とB君は総額で20万円の日収になる.
    - A君とC君なら，15万円．B君とC君なら，10万円.
  - 3人で起業すると，総額24万円の日収になる.
- さて，誰と一緒に起業して，どのように利益を分配するのがいいだろうか？

提携形ゲーム

- 提携形ゲーム (coalitional game): (N, v)
  - $N = \{1, \cdots, n\}$: プレイヤーの集合
  - $S \subseteq N$: 提携 (coalition)
  - $v: 2^N \to \mathbb{R}$: 特性関数. $v(S)$ は提携 S のメンバーが協力して得る利得を表す.
- $(N = \{A, B, C\}, v)$ の例
  - $v(A) = 6, v(B) = 4, v(C) = 2,$
    $v(AB) = 20, v(AC) = 15, v(BC) = 10,$
    $v(ABC) = 24.$

優加法性

- 特性関数 v が優加法的 (super-additive) であるとは，任意の2つの提携 $S, T\ s.t.\ S \cap T = \emptyset$ に対して，$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ が成り立つことである.
- 特性関数が優加法的である場合，全体提携 (grand coalition) N の利得が最も大きくなる.
- 以下の議論では，特性関数が優加法的であることを仮定し，如何に $v(N)$ をプレイヤー間で分割するかを考える.

戦略的同等性とゲームの正規化

- ゲーム (N, v) と (N, v') が戦略的同等であるとは，正数 α と実数 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ が存在して，任意の提携 S に対して，
$$v'(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$$
が成り立つことである．
- 0－正規化: ゲーム (N, v) に対して，$v'(i) = 0, i = 1, \cdots, n$ を満たす戦略的同等なゲーム (N, v') が存在し，0－正規化ゲームという．

利得ベクトルと配分

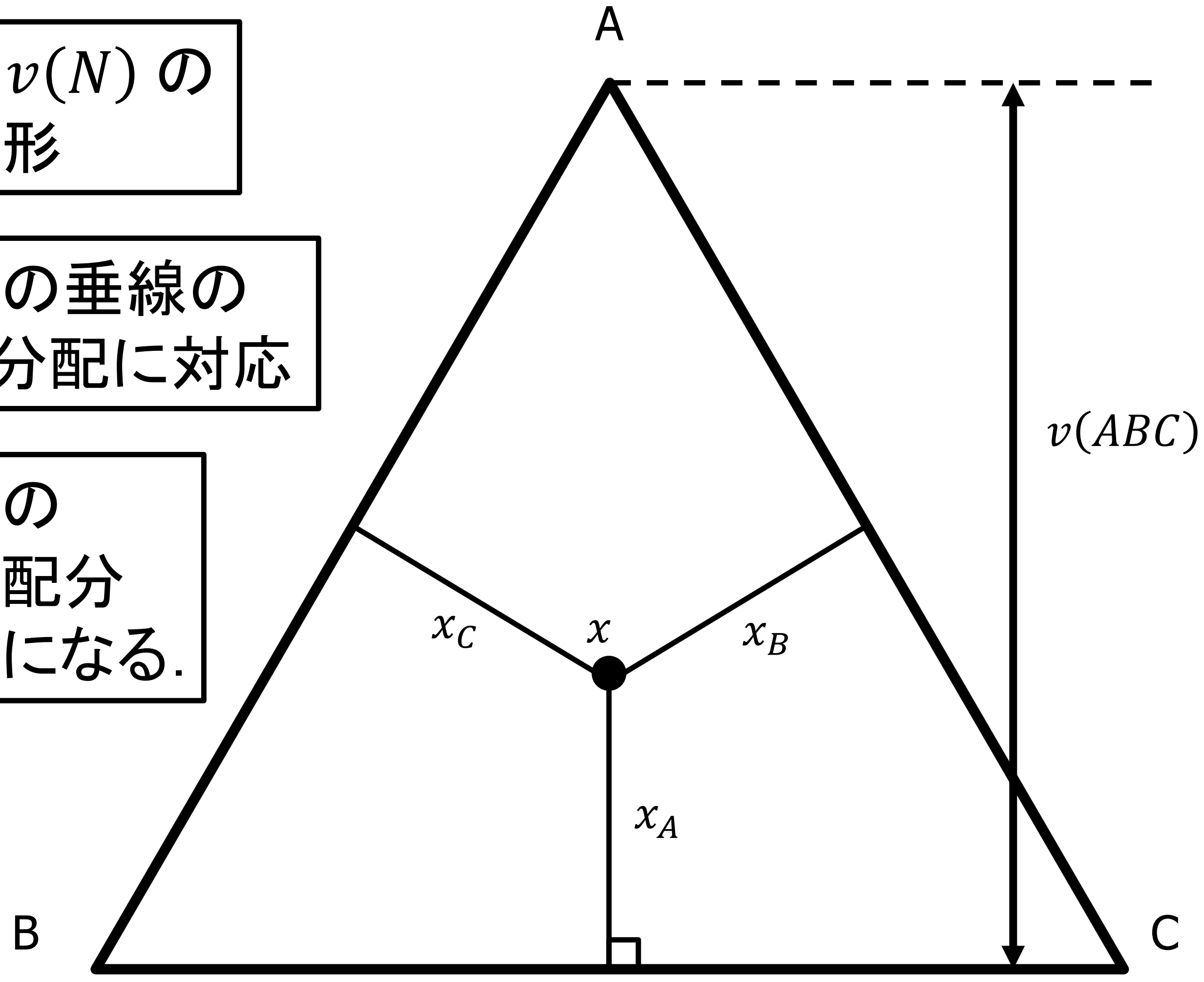
- プレイヤー i の利得を x_i とし, $x = (x_1, \cdots x_n)$ を利得ベクトル (payoff vector) という.
  - $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ と書く.
- 配分 (imputation): 以下の条件を満たす利得ベクトル (の集合)
  - 個人合理性: $x_i \geq v(i), i = 1, \cdots n$
  - 全体合理性: $x(N) = v(N)$
- 最も基本的な解概念 (solution concept)

基本三角形

高さが $v(N)$ の
正三角形

各辺への垂線の
長さが分配に対応

三角形の
内側が配分
の集合になる.



解概念

- 提携形ゲームから利得ベクトルへのマッピング
- 解が利得ベクトルの集合となるもの
  - コア (core)
    - 最小コア
  - 仁 (nucleolus)
  - 核 (kernel)
  - 安定集合
- 解が一意に定まるもの
  - シャプレイ値 (Shapley value)

アウトライン

- 提携形ゲーム
  - 特性関数
  - 利得ベクトルと解概念
- コア
  - ブロッキング提携とコア
  - コアの存在条件
- コアの精緻化
  - 不満
  - 最小コア，仁

ブロッキング提携とコア

- 以下の条件を満たすとき，提携 S は利得ベクトル x をブロックするという:

$$x(S) < v(S)$$

- コア: 以下の条件を満たす利得ベクトルの集合
  - 提携合理性: $x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N$
  - 全体合理性: $x(N) = v(N)$
- 配分をブロックする提携がない $\Rightarrow$ 全体提携から逸脱する誘因をもつ提携がない
- 安定な配分の集合

コアの例 (1/3)

$v(A)=6, v(B)=4, v(C)=2,$
$v(AB)=20, v(AC)=15, v(BC)=10,$
$v(ABC)=24.$

- $x=(x_A, x_B, x_C)=(10,8,6)$ を考える.
  - $v(N)-\big(v(A)+v(B)+v(C)\big)=12$ を平等に3等分し，個人で得られる利得に加算している.
  - いかにも大丈夫そうな利得の分け方だが…？
- x はコアに含まれない.
  - 提携 $\{A,B\}$ がブロックする.
    - $x(AB)=18<v(AB)=20$
  - このままでは，AとBは全体提携から逸脱してしまう.

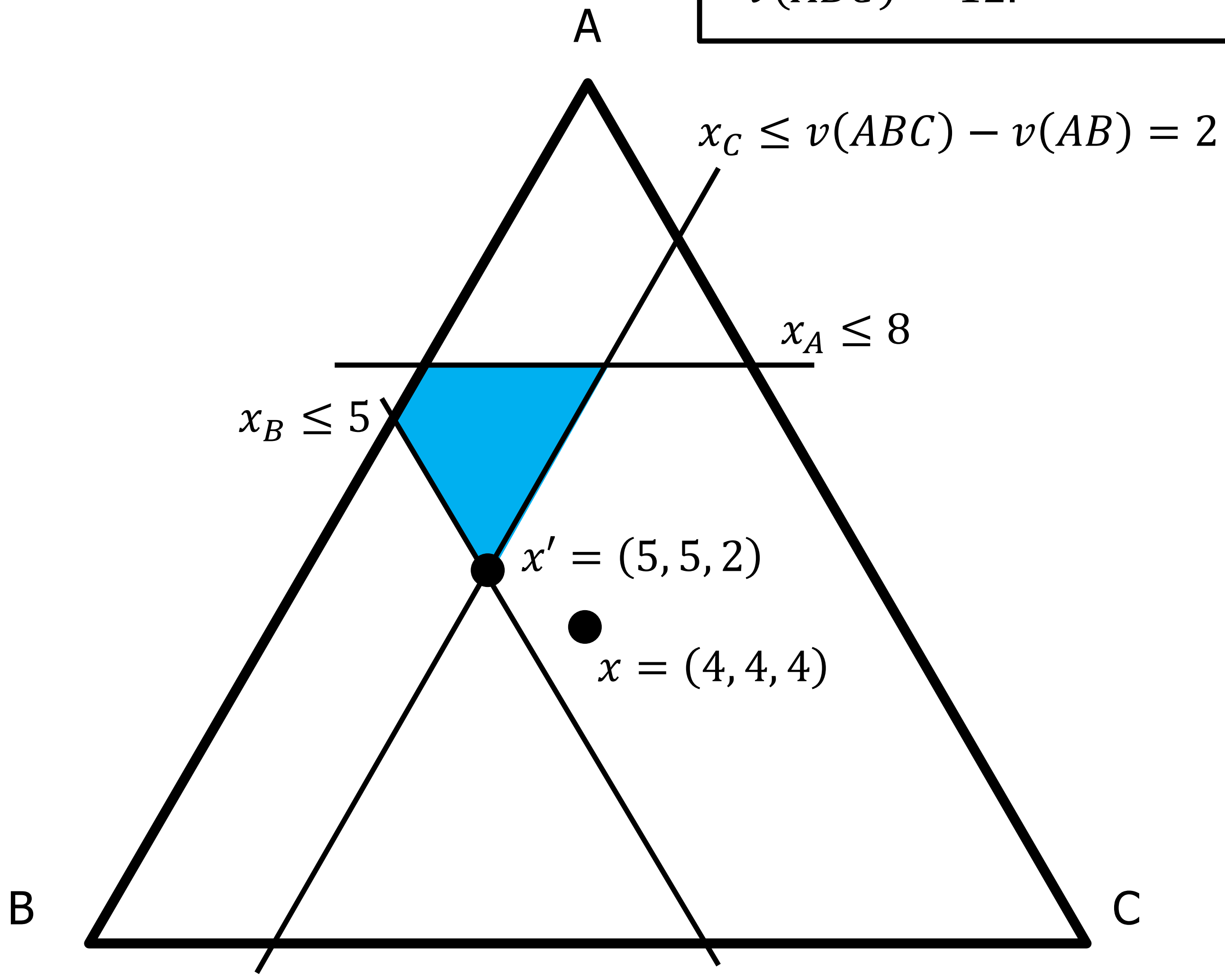
コアの例 (2/3)

$v(A) = 6, v(B) = 4, v(C) = 2,$
$v(AB) = 20, v(AC) = 15, v(BC) = 10,$
$v(ABC) = 24.$

- $x' = (11, 9, 4)$ を考える.
  - AとBに与える利得が足りなかったので，Cから1ずつ取り上げる.
- x' はコアに含まれる.
  - どの提携も x' をブロックしない.
  - 全体合理性を満たしている.
- このゲームを0-正規化し，基本三角形でコアの領域がどのように表示されるかみてみよう.

非空なコア

$v(A) = 0\ v(B) = 0, v(C) = 0,$
$v(AB) = 10, v(AC) = 7, v(BC) = 4,$
$v(ABC) = 12.$



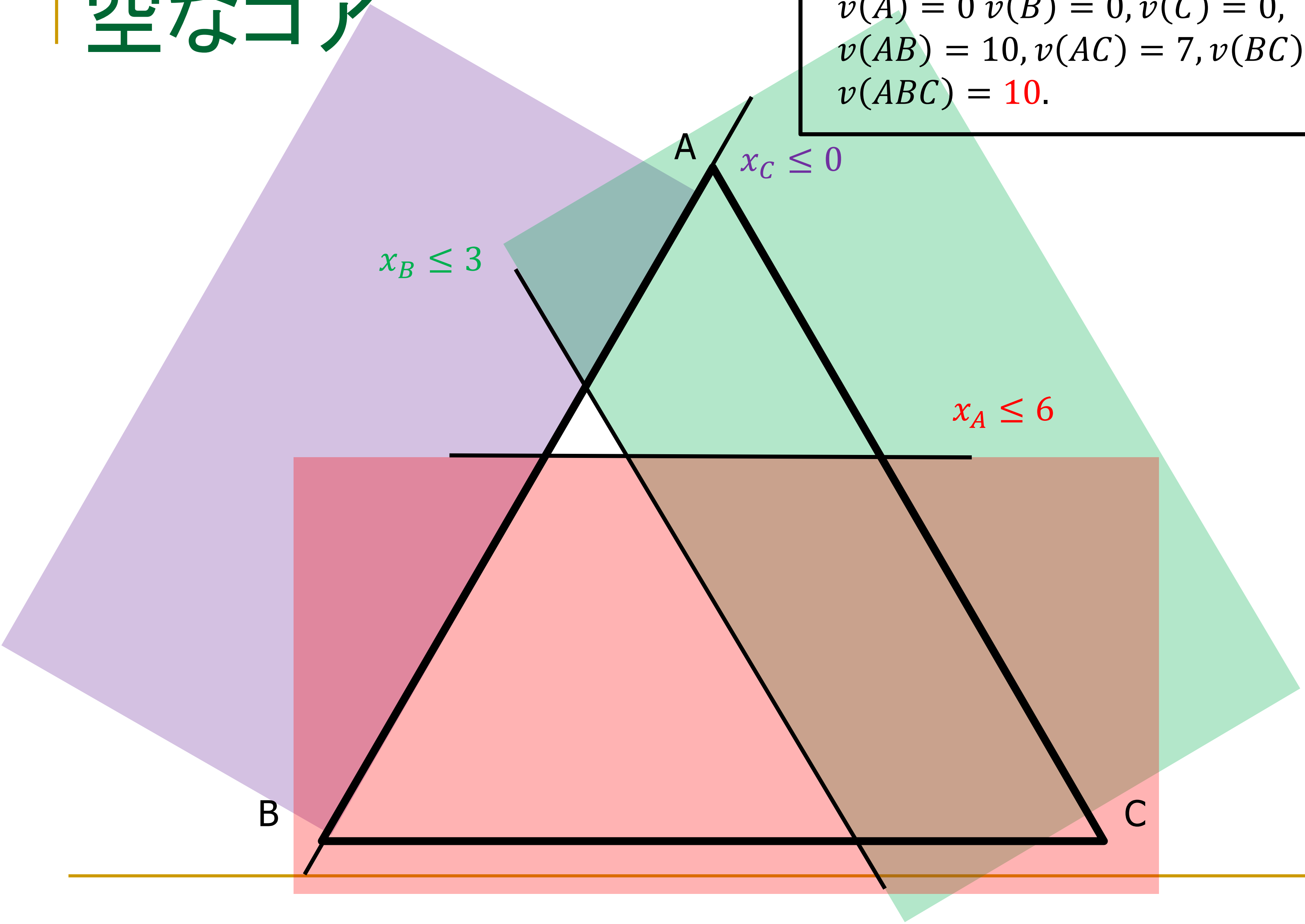
コアの例 (3/3)

$v(A)=6, v(B)=4, v(C)=2,$
$v(AB)=20, v(AC)=15, v(BC)=10,$
$v(ABC)=22.$

- $v(ABC)=22$ と全体提携の利得が2だけ少なくなったゲームを考える.
  - このゲームは優加法的なままである.
- このゲームのコアは空である.
  - どんな配分にも，それをブロックする提携が少なくともひとつ存在する.
  - 分配する利得が足りなくなると，コアが空になってしまう.
- 同様に0-正規化し，基本三角形で確認！

空なコア

$v(A) = 0\ v(B) = 0, v(C) = 0,$
$v(AB) = 10, v(AC) = 7, v(BC) = 4,$
$v(ABC) = 10.$



コアの存在条件

- 凸ゲーム: 任意の提携 S,T に対して, $v(S)+v(T)\leq v(S\cup T)+v(S\cap T)$ が成立するゲーム. ただし, $S\cap T=\emptyset$ の場合, $v(\emptyset)=0$ とする.
- 定理 凸ゲームのコアは非空である.
- 定理 コアが非空であるための必要十分条件は, 次の線形計画問題

$$\min x(N)\ \ s.t.\ x(S)\geq v(S), \forall S\subset N$$

の最小値 z^* が $z^*\leq v(N)$ を満たすことである.

アウトライン

- 提携形ゲーム
  - 特性関数
  - 利得ベクトルと解概念
- コア
  - ブロッキング提携とコア
  - コアの存在条件
- コアの精緻化
  - 不満
  - 最小コア，仁

不満

$v(A) = 0\ v(B) = 0, v(C) = 0,$
$v(AB) = 10, v(AC) = 7, v(BC) = 4,$
$v(ABC) = 12.$

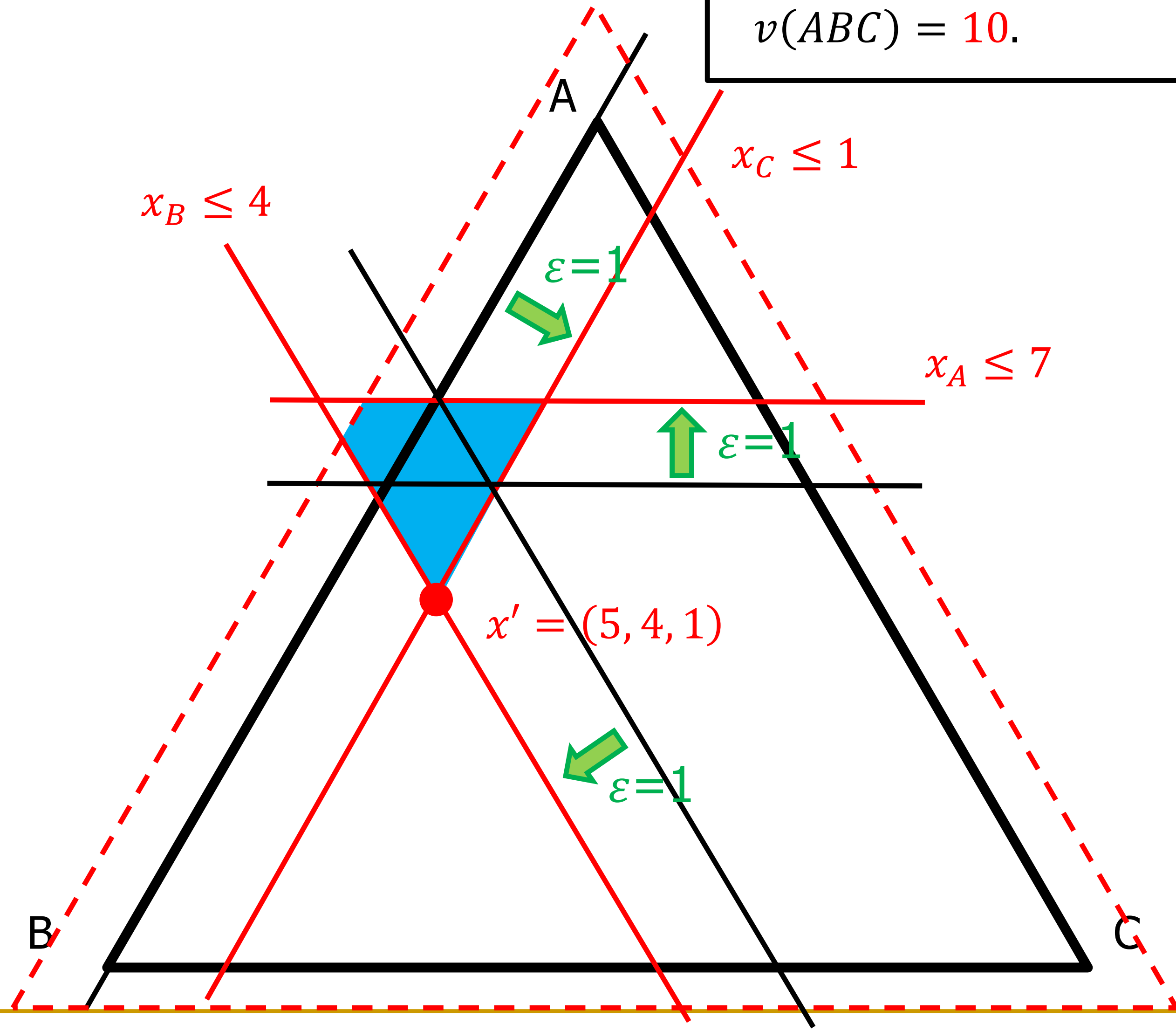
- 利得ベクトル x に対して提携 S が持つ不満 (excess) を $e(S, x) = v(S) - x(S)$ とする.
  - 正の不満を持つとき，その提携はその利得ベクトルをブロックする.
  - コアに属する利得ベクトルでは，不満は0か負の値になっている.
- $x = (4,4,4)$ に対して，
  - 提携 $\{A, C\}$ は，$e(AC, x) = 10 - 8 = 2$ の不満を持つ.
  - 提携 $\{B, C\}$ は，$e(BC, x) = 4 - 8 = -4$ の不満を持つ.

ε-コアと最小コア

- コアの提携合理性条件を，不満を使って緩和する．
- ε-コア:以下の条件を満たす利得ベクトルの集合
  - $e(S,x) \leq \varepsilon, \forall S \subseteq N$
  - $x(N) = v(N)$
- 最小コア: 非空なε-コアの中で，ε が最小のもの
  - コアが非空である場合，ε は負の値になり得る．
- ε-コアや最小コアでは，個人合理性も緩和されていることに注意．
  - 全体合理性だけを満たす利得ベクトルを準配分 (preimputation) と呼ぶ．

$\varepsilon = 1$コア

$v(A) = 0\ v(B) = 0, v(C) = 0,$
$v(AB) = 10, v(AC) = 7, v(BC) = 4,$
$v(ABC) = 10.$



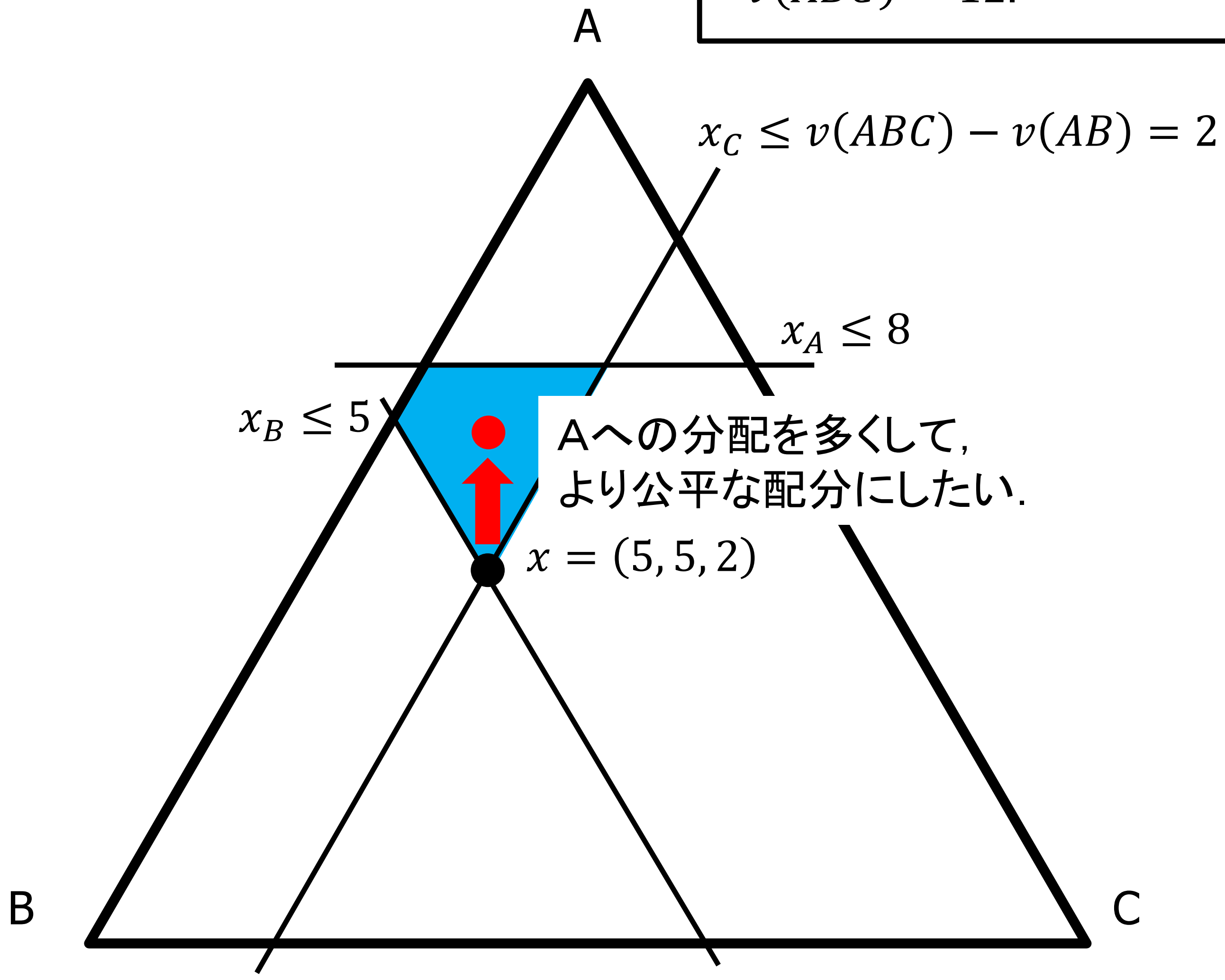
安定性 vs. 公平性

$v(A) = 0\ v(B) = 0, v(C) = 0,$
$v(AB) = 10, v(AC) = 7, v(BC) = 4,$
$v(ABC) = 12.$

- コアは安定な解概念であると言われている.
  - 全体提携から逸脱する誘因をもつ提携が存在しない, “安定な”解 (の集合)
- コアでは, プレイヤー間の分配のバランスをそこまで最適化していない.
  - 公平な解にはなっていない可能性がある.
  - 例えば, $x = (5, 5, 2)$ はBとCがもらい過ぎ？
    - 提携 $\{A, B\}$ と $\{A, C\}$ の不満は 0
    - 対して, 提携 $\{B, C\}$ の不満は -3

非空なコア (再掲)

$v(A) = 0\ v(B) = 0, v(C) = 0,$
$v(AB) = 10, v(AC) = 7, v(BC) = 4,$
$v(ABC) = 12.$



不満ベクトル

$v(A) = 0\ v(B) = 0, v(C) = 0,$
$v(AB) = 10, v(AC) = 7, v(BC) = 4,$
$v(ABC) = 12.$

- $\theta(x) = \left(e(S^1, x), e(S^2, x), \cdots, e(S^K, x)\right), K = 2^n - 1$
  - ただし，$e(S^1, x) \geq e(S^2, x) \geq \cdots \geq e(S^K, x)$
- $x = (5, 5, 2)$ の不満ベクトルは以下の通り:
  - $\theta(x) = (0,0,0, -2, -3, -5, -5)$
- 利得ベクトル x, y に対して，y が x よりも受容的 (acceptable) であるとは，$\theta(y)$ が $\theta(x)$ よりも辞書式順序の意味で小さい ($\theta(y) <_L \theta(x)$ と書く) ときをいう.
- $y = (7,4,1)$ の不満ベクトルと比較してみる:
  - $\theta(y) = (0, -1, -1, -1, -1, -4, -7)$

仁

- 仁: 以下の条件を満たす配分の集合
  - $\{x \in X | \theta(x) \leq_L \theta(y), \forall y \in X\}$
  - ただし, X は配分の集合
- 性質:
  - 必ず存在し, 最小コアに含まれる.
  - 線形計画問題を繰り返し解くことで求めることができる.
    - 最大不満を最小化, その次に大きい不満を最小化...
  - 計算量は絶望的
    - あまり, 情報学分野では扱われない.

まとめ

$$v(A) = 0\ v(B) = 0, v(C) = 0,$$
$$v(AB) = 10, v(AC) = 7, v(BC) = 4,$$
$$v(ABC) = 12.$$