
ゲーム理論

第3回 展開形ゲーム

佐賀大学大学院 工学系研究科

知能情報システム学専攻

上田 俊

Email: sgrueda@cc.saga-u.ac.jp

<https://sites.google.com/view/sgrueda/in-japanese>

アウトライン

- 展開形ゲーム
 - 展開形ゲームの要素とゲーム木
 - 完全情報・完備情報
 - バックワードインダクション
- ゲーム木探索
 - ゲームの必勝法
 - ノードのラベル付け
 - ゲーム木の評価

展開形ゲームとは

- プレイヤーのいくつかの手番の系列からなり, 各手番でプレイヤーはなんらかの行動を選択する.
 - 戦略形ゲームと違い, 一人ずつ行動を選択する.
 - 自分より先に行動したプレイヤーの選択を観察した上で, 行動できる (場合が多い).
 - 完全情報 (perfect information) or 不完全情報
 - チェス, 将棋, オセロ等々... をモデル化できる.
- 木のモデルを用いて記述する.
 - ゲーム木と呼ぶ.

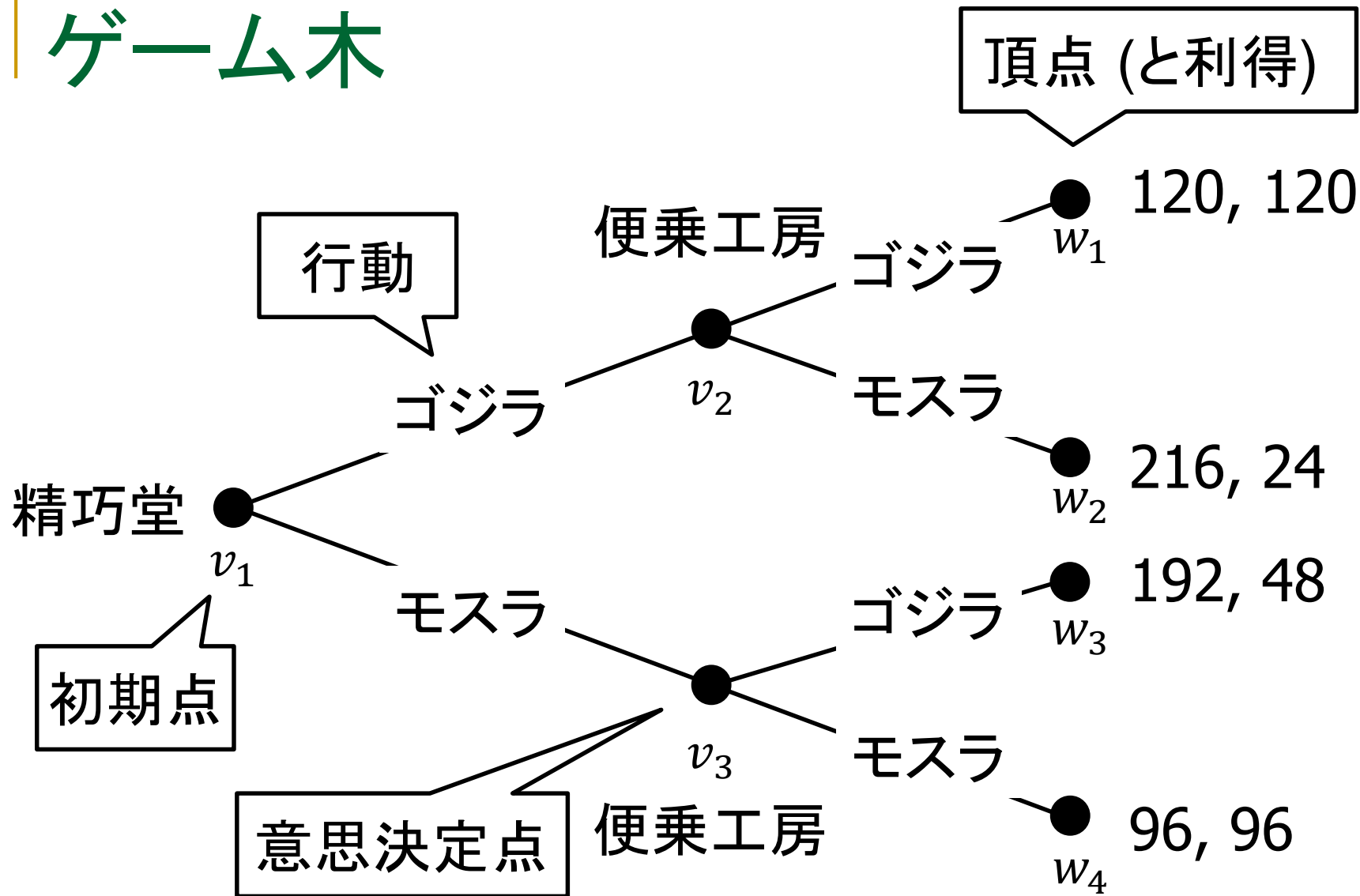
精巧堂 vs. 便乗工房

今度こそ便乗します!

- ナッシュ均衡
 - お互いの戦略 (行動) が最適反応になっている組
- 右のゲームのナッシュ均衡は...
 - 精巧堂は $\frac{1}{3}$ でゴジラを選択, $\frac{2}{3}$ でモスラを選択
 - 便乗工房は $\frac{5}{8}$ でゴジラを選択, $\frac{3}{8}$ でモスラを選択
- 便乗工房が精巧堂の選択を観察してから行動できるとどうなるだろう?

| | | |
|-----------------|------------|-----------|
| 便乗 工房 精巧堂 | ゴジラ | モスラ |
| ゴジラ | (120, 120) | (216, 24) |
| モスラ | (192, 48) | (96, 96) |

ゲーム木



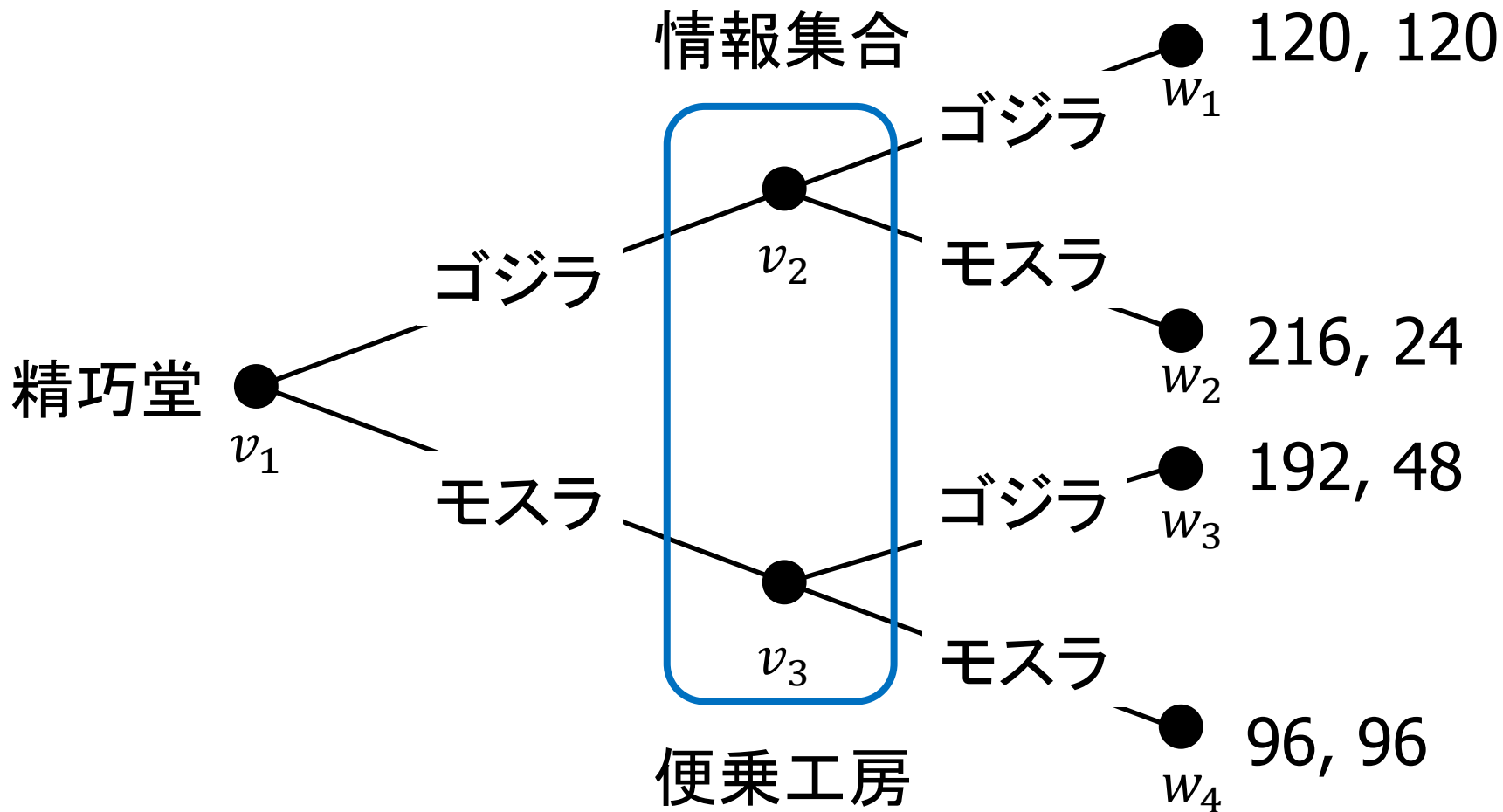
展開形ゲームの定義

- 展開形ゲーム (game in extensive form)
 - $\Gamma = (K, P, p, U, h)$
 - K : ゲームの木
 - P : 木のプレイヤー分割
 - p : 偶然手番の確率分布族
 - U : 情報分割
 - h : 利得関数. ゲーム木 K の各頂点 w に対して, 利得ベクトル $h(w) = (h_1(w), \dots, h_n(w))$ を対応させる.
- 複雑なので,
今回は省略

完全情報ゲーム

- すべてのプレイヤーが行動を選択するとき、その手番以前のゲームのプレイの結果を完全に知ることができる場合、完全情報ゲーム (game in perfect information) であるという。
- チェスや将棋は完全情報ゲーム。
- カードゲーム (ブラックジャック, Magic:the gatheringをはじめとする戦略型TCG, 等々)
 - 相手の伏せたカードが見えない。(ブラックジャック)
 - 相手の引いたカードが見えない。(戦略型TCG)

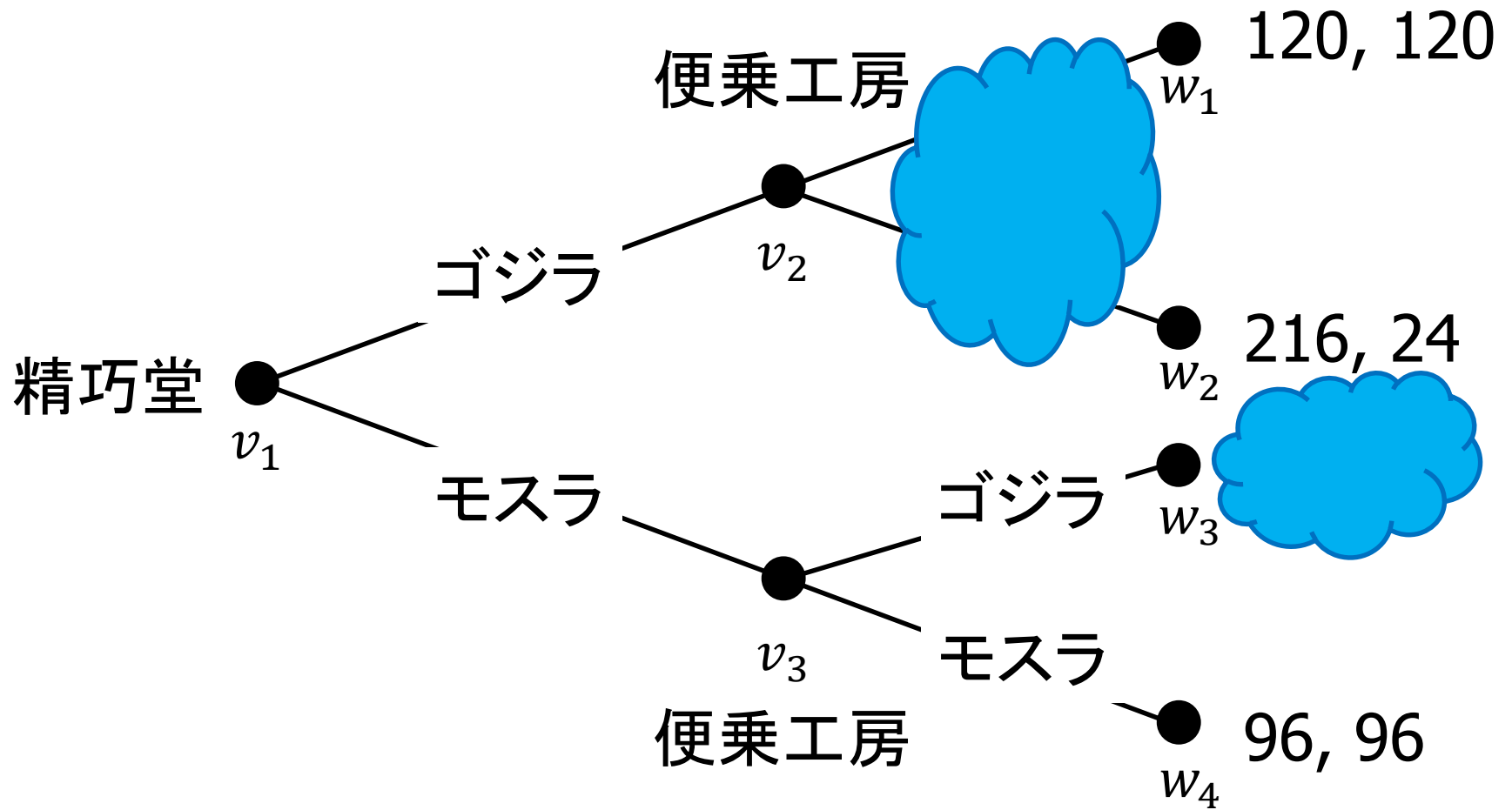
完全情報でないゲーム



完備情報ゲーム

- すべてのプレイヤーはゲームのルールを完全に知っていて、さらに「他のプレイヤーもゲームのルールを知っている」ことをすべてのプレイヤーは完全に知っている場合、完備情報ゲーム (game with complete information) であるという。
- そうでない場合は、不完備情報ゲーム (game with incomplete information) という。
- メカニズムデザインでは、不完備情報ゲームをベースにして議論を行う。

不完備情報ゲーム



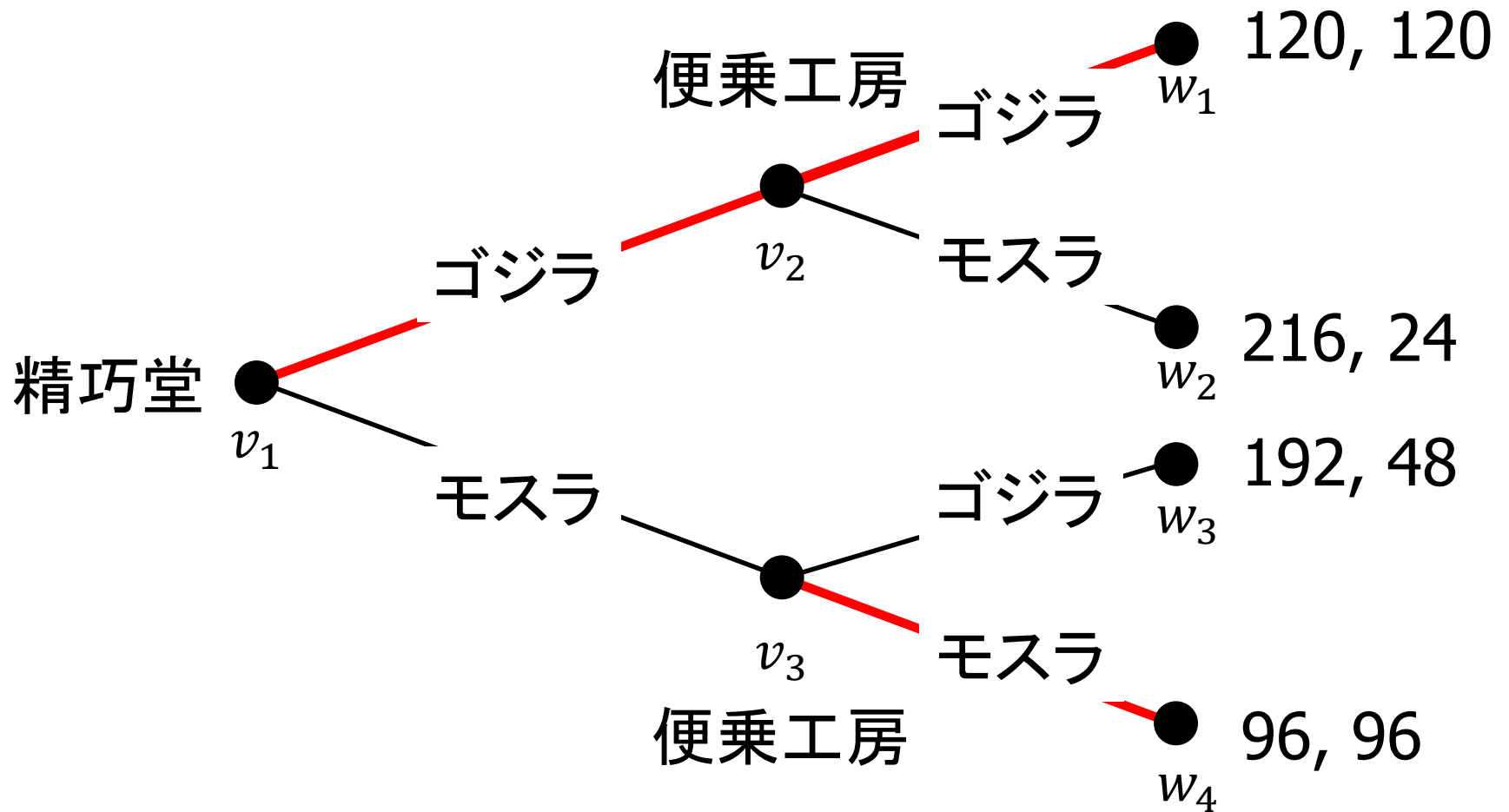
完全情報・完備情報

- 完全情報 (perfect information)
 - すべてのプレイヤーの行動を観測できる.
 - 展開形ゲームの種類
- 完備情報 (complete information)
 - ゲームのルールがプレイヤー間で共通知識 (common knowledge) になっている.
 - 戦略形ゲーム・展開形ゲームどちらにも用いられるゲームの種類

バックワードインダクション (1/2)

- 定理 ゲームの木が有限サイズであり, 完全情報である場合, 純戦略による均衡点が必ず存在する.
 - 純戦略: 各意思決定点において, 選択する行動が決まっている戦略
- そのような均衡点は後向き帰納法 (backward induction) で求めることができる.
- 頂点に近い意思決定点から初期点に向かって (後向きに) 最適反応を計算する.

バックワードインダクション (2/2)



精巧堂 vs. 便乗工房 の均衡点

| | | |
|------|-------|-----|
| 精巧堂 | v_1 | ゴジラ |
| 便乗工房 | v_2 | ゴジラ |
| 便乗工房 | v_3 | モスラ |

| | | |
|-------------------|----------------------|----------------------|
| 便乗 工房 精巧堂 | ゴジラ $\frac{5}{8}$ | モスラ $\frac{3}{8}$ |
| ゴジラ $\frac{1}{3}$ | (120, 120) | (216, 24) |
| モスラ $\frac{2}{3}$ | (192, 48) | (96, 96) |

展開形ゲームの戦略と均衡

- 展開形ゲームの戦略をどう表現するか。
 - 純戦略: 各意思決定点において, 可能な行動のうちひとつを確定的に選択する戦略
 - 混合戦略: 純戦略の集合上の確率分で表され, 確率的に純戦略をひとつ選択する戦略
 - 行動戦略: 各意思決定点において, 可能な行動上の確率分布に従って, 確率的に行動を選択する戦略
- 展開形ゲームでの望ましい均衡とは
 - ナッシュ均衡では不十分
 - 部分ゲーム完全均衡 – 本講義では割愛

アウトライン

- 展開形ゲーム
 - 展開形ゲームの要素とゲーム木
 - 完全情報・完備情報
 - バックワードインダクション
- ゲーム木探索
 - ゲームの必勝法
 - ノードのラベル付け
 - ゲーム木の評価

例題

- 二人で交代に, 1から順に25までの数を言う.
- 言う数の個数は, 1個, 2個, 3個のいずれか好きなものを選んでよい
- 最後に25を言った方が負け

勝つにはどうすればよいか

- 24を言って、相手に順番を回せば絶対勝ち.
- 一方, 20を言って、相手に順番を回せば、相手が何個を選んでも、次に24を言える – 絶対勝ち
- 同様に, 16を言って、相手に回せば次に20を言える – 絶対勝ち
- 同様に, 12, 8, 4を言って回せば勝ち.
- 先手が何を言おうと、後手は4を言って回せる.
- 結局, 後手が必勝.

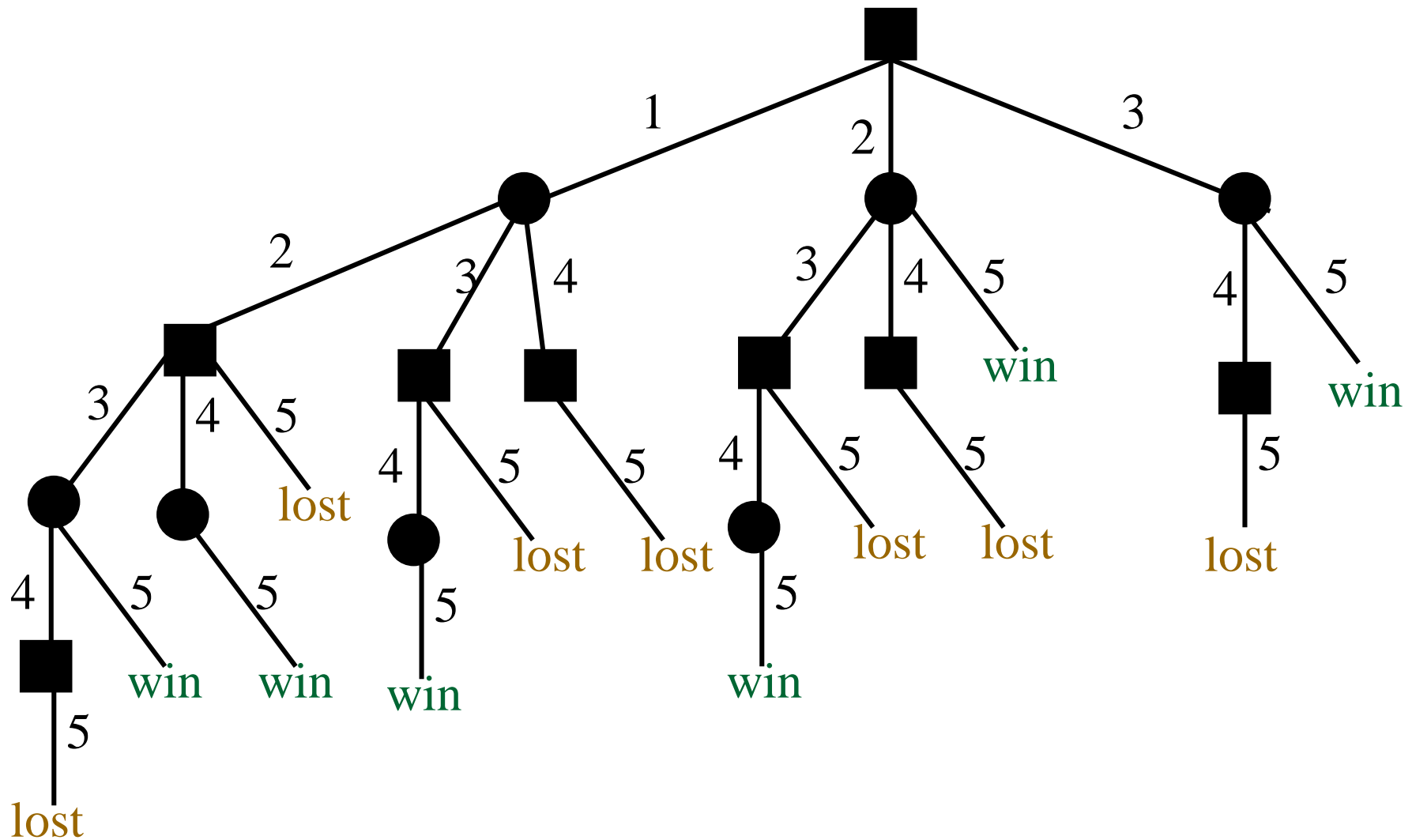
必勝法

- 二人, 完全情報, 決定的な (偶然の要素がない) ゲームは, 原理的には必勝法が存在する
 - 先手必勝 or 後手必勝 or 引き分け
- 先手/後手を決めた時点で勝負はついている! (ゲームをするまでもない)
- 簡単なゲームなら必勝法が分かる
 - 三目並べ: 引き分け
 - 五目並べ: 先手必勝
 - 6x6オセロ: 後手必勝

必勝法を見つけるには？

- ゲーム木を書いてみよう！
- 頂点には利得の代わりに、プレイヤーの勝ち負けが書いてある.
- 先手をMAXプレイヤー，後手をMINプレイヤー，それぞれの意思決定点をMAXノード (■)，MINノード (●) と呼ぶ.

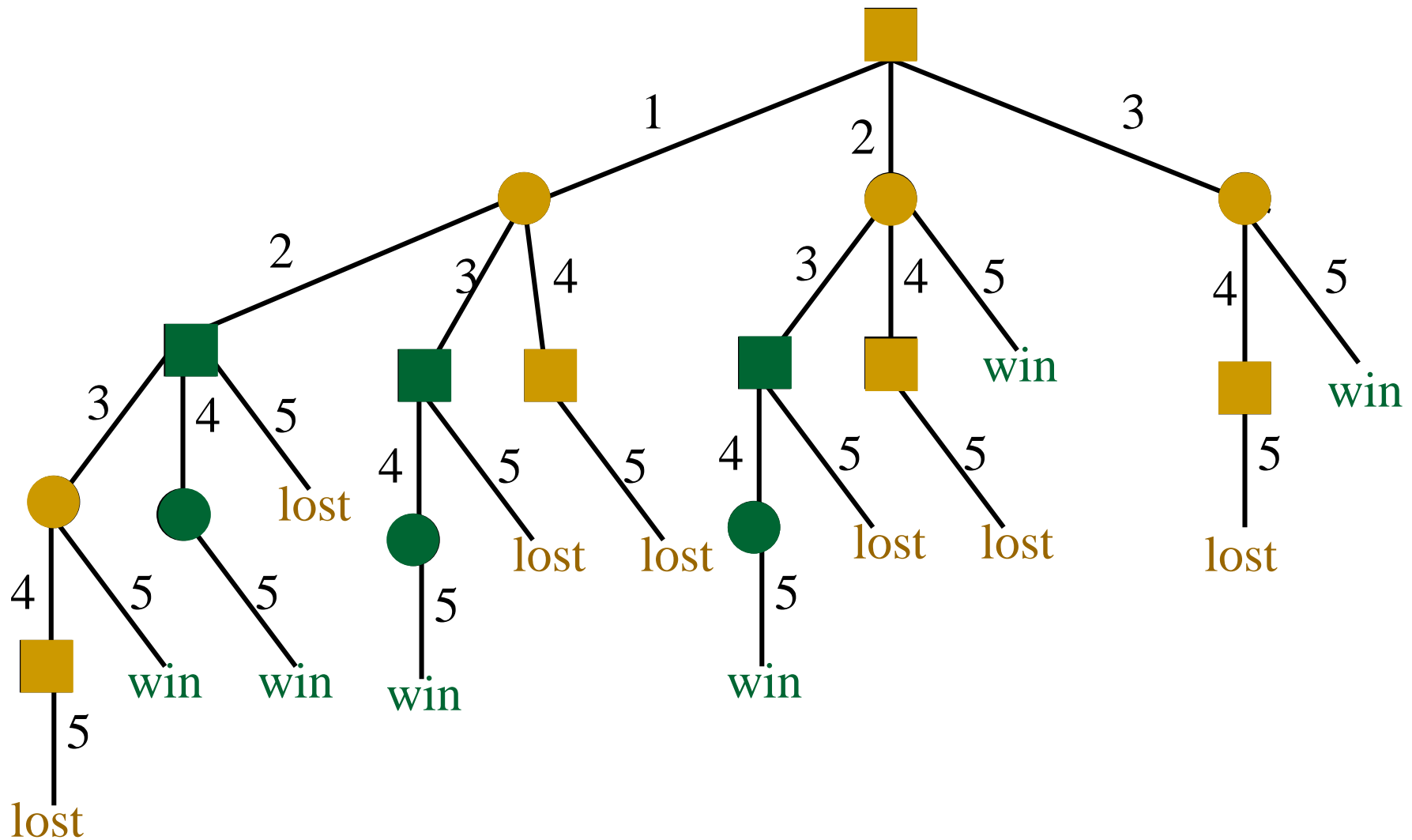
「5を言ったら負け」のゲーム木



ノードのラベル付け

- ノードにwin/lost (先手目線) のラベルを付ける.
- 以下のように再帰的に定義
 - 頂点に関して, そのままwin/lost
 - MAXノードに関しては, 子ノードに少なくとも一つwinがあればwin, すべてlostならlost
 - MINノードに関して, 子ノードに少なくとも一つlostがあればlost, すべてwinならwin
 - winを100, lostを-100とすると, 上記の処理はMAXノードでは子ノードの最大値, MINノードでは最小値を取ることに対応

「5を言ったら負け」のゲーム木



ゲーム木の展開

- 必ずしも木を完全に展開する必要はない.
 - あるMAXノードに関して、子ノードに少なくとも一つのWINがあれば、そのMAXノードはWIN
 - 他の子ノードは展開しなくても良い。
 - あるMINノードに関して、子ノードに少なくとも一つLOSTがあれば、そのMINノードはLOST
 - 他の子ノードは展開しなくて良い。

ゲーム木のサイズ

- チェッカー 10^{30} 世界チャンピオン
 - 2007年に引き分けであることが証明された.
- オセロ 10^{60} 世界チャンピオン
- チェス 10^{120} 世界チャンピオン
- 将棋 10^{220} 2013年A級プロ棋士に勝利！
- 囲碁 10^{360} 2016年アルファ碁がトッププロに勝利！
- 次は麻雀だと言っている人がいるらしい...
 - 偶然や4人対戦といった異なる要素があるので.

ゲーム木が大きすぎる場合

- 普通のゲームでは、端点まで木を展開するのは不可能
- 途中まで展開されたゲーム木で、どの手が良いかを選ぶ必要がある（一手，二手，三手先まで読む等）

ゲーム木の評価 (MIN-MAX法)

- 途中の状態に関して、その良さを評価する関数を作る (静的評価関数)
- 評価関数は数値を返す (大きいほうが良い)
 - チェス／将棋: 所有するコマの数／価値, 配置等
 - オセロ: コマの数, 位置 (4スミ, 端)
- (ゲームが終了している訳ではない) 端点の評価値を, 静的評価関数の値とする
- 他のノードの評価値を, 必勝法を決める方法と同様にして決める (MAXノードは最大値, MINノードは最小値)
- ルートのMAXノードで, 最大値を与える経路を選ぶ。

静的評価関数

- 静的評価関数がどのくらい正確にできているかでAIの性能が決まる.
 - なぜ, いまAIが勝ち進んできているのか?
 - PC性能の向上?
- 静的評価関数の新しい作り方
 - モンテカルロ法: その点からランダムにプレイ (プレイアウト) し, 統計的に勝てる盤面か調べる.
 - ディープラーニング: 盤面の画像を学習して, 勝てる盤面・勝てない盤面を学習している (らしい)

まとめ

- 展開形ゲーム
- ゲーム木
 - 展開形ゲームを木構造を用いて表現したもの.
 - バックワードインダクションを用いて均衡点を求める.
- ゲーム木探索
 - 将棋や囲碁のAIの基礎
 - 最近はラーニングを静的評価関数の設計に取り入れ大成功を収めている.