ゲーム理論と確率モデル

第 1 回 イントロダクション・ゲーム理論とは何か

上田 俊

佐賀大学理工学部
知能情報システム学科

2018 年 10 月 2 日

概要

- 前半: ゲーム理論
  - 担当: 上田 俊 助教
  - 複数の主体による意思決定の相互依存関係を分析する数学モデル・理論
- 後半: 確率モデル
  - 担当: 奥村 浩 教授
  - オートマトンやマルコフ過程といった確率モデル
- どちらも，理工学分野に広い応用分野を持つ．

注意事項

- 2 年次以降の理工学部の学生のみ受講可.
  - ただし，知能情報システム学科の学生を除く.
- 中間試験 (ゲーム理論) 50 点，期末試験 (確率モデル) 50 点で成績評価
- 5 回以上無断欠席をした場合，0 点 (不可)
- 前半もしくは後半で 3 回以上無断欠席をした場合，0 点

参考書，講義スライド

- 参考書
  - ゲーム理論 (新版)，岡田 章，有斐閣，2011 年
  - ゼミナール ゲーム理論入門，渡辺 隆裕，日本経済新聞出版社，2008 年
  - オークション理論の基礎，横尾 真，東京電機大学出版会，2006 年
- 市販の入門書を買うのも良い．
- 講義スライドを配布する．
- スライドを講義後に HP に掲載
  - https://sites.google.com/view/sgrueda/in-japanese

講義予定 (上田担当分)

- 第 1 回 (10/02): イントロダクション
- 第 2 回 (10/09): 戦略形ゲーム
- 第 3 回 (10/16): 展開形ゲーム
- 第 4 回 (10/23): 繰り返しゲーム
- 第 5 回 (10/30): 協力ゲーム (1) - コアの理論
- 第 6 回 (11/06): 協力ゲーム (2) - シャプレイ値
- 第 7 回 (11/13): アドバンスドトピック
- 第 8 回 (11/20): 中間試験

ゲーム理論とは?

- ゲームとは?
  - スポーツ? - サッカー，テニス，etc.
  - 卓上ゲーム? - 将棋，チェス，etc.
  - コンピュータゲーム?
- ゲーム的状況
  - 複数の意思決定主体または行動主体が存在し，それぞれの目的の実現を目指して相互に依存しあっている状況
  - これの数理モデル $\rightarrow$ ゲーム

オークション (1/2)

- 問題設定
  - あなたは商社の社員である.
  - 油田の開発権がオークションにかけられている.
  - 社長 (上司) の指示で入札に参加する.
  - 入札額の最大値が指定されている.
    - $[0, 200]$ の一様分布 (等確率)
  - 開発権を競り落とせば，差額がボーナスとして支払われる.
    - 競り落としても赤字であれば，自己負担
    - 失敗すればボーナスはなし.

オークション (2/2)

- 問題設定 (続き)
  - 他の参加者の入札額を知ることはできない.
  - ただし，他の参加者も会社の指示できており，入札額の最大値が指定されている.
  - 具体的には，他の参加者の入札額の最大値は，同様に $[0, 200]$ の一様分布であることがわかっている.

  - 第一価格入札方式でオークションを行う:
    最も高い入札額を示した参加者が勝者となり，自身の入札額を支払う.

入札戦略

- 社長がつけた最大値を (仮に) 100 とする.
- 入札額によってボーナス額が変化
  - 100 より大きい額を入札しても意味がない.
  - 90 を入札して，勝てれば利益は 10
  - 1 を入札して，(万一) 勝てれば利益は 99
- あなたの利得
  - 勝った場合: 100 − 入札額 (負になり得る)
  - 負けた場合: 0

どうすれば利得を最大化できるか

- 利得が最大化される最適な戦略は相手の入札額に依存するのでわからない.
- 入札額を 50 としたときに，利得が 50 になるか 0 になるかは，相手の入札額次第
    - 相手の入札額 < 50 の場合，あなたが勝ち，利得は $100 - 50 = 50$
    - 相手の入札額 > 50 の場合，あなたは負け，利得は 0
- 相手の入札額になんらかの仮定を置いて考える.

相手の入札額を仮定

- 仮に相手の入札額が $[0, 100]$ の一様分布とする．
- 低い値を入札する．$\rightarrow$ ハイリスク・ハイリターン
  - 入札額が 20 のとき，勝てる確率は $\frac{20}{100}$
  - 期待利得は，$(100 - 20) \times \frac{20}{100} = 16$
- 高い値を入札する．$\rightarrow$ ローリスク・ローリターン
  - 入札額が 80 のとき，勝てる確率は $\frac{80}{100}$
  - 期待利得は，$(100 - 80) \times \frac{80}{100} = 16$
- 入札額が x のとき，期待利得は $x - \frac{x^2}{100}$
- 最適な入札は 50，そのとき期待利得 25

実は...

- もし，相手が自分と同じように考えていたら，相手も最大値のちょうど半分を入札
- そのため，相手の最大値が $[0, 200]$ の一様分布ならば，入札額は $[0, 100]$ の一様分布となり仮定が成立
- このように，互いの戦略が相手の戦略に対して最適になっている戦略の組をナッシュ均衡と呼ぶ.

ナッシュ均衡

- 相手が最大値の半分を入札する限り，自分にとって最大値の半分を入札するのが最適
- 同様に，自分が最大値の半分を入札する限り，相手にとっても最大値の半分を入札するのが最適
- 十分に賢いプレイヤ同士の対戦なら，多分この状態に落ち着く．

勝者の災い (1/2)

- あなたは先ほどの均衡戦略を用いて，いくつもの油田を得ることができた．
  - ボーナスもいっぱい!
- しかし，会社の業績は悪くなり，ついに倒産してしまう．
  - 油田から利益を得ていたはずなのになぜ?
  - 社長や同僚から，あなたが呪われていたからだと言われてしまう．
- 本当に呪われてしまったのだろうか...

勝者の災い (2/2)

- 原因は油田が共通価値財であったこと
  - 決して呪いではない.
  - 共通価値: 財の勝ちがすべての人で共通
- オークションで勝つためには高い値を入札しなければならない.
- 特別良い情報を持っていない限り，勝者 $=$ 最も大きく間違えた人
- つまり，油田を開発しても利益が得られない.
  - 社長の指示がダメダメだった...

電波オークション

- 電波の周波数の一定期間の利用権を競争入札で割り当てること
  - http://www.itmedia.co.jp/news/articles/1709/14/news055.html
- 1990 年代の第 3 世代携帯電話用周波数オークションがヨーロッパで実施済み
  - 落札額が予想以上に高額に...
  - 勝者の災いが起こり，経営破たんに陥る事業者が発生
- では，どうするか?

第二価格秘密入札

- 以下のように入札方式を変更
  - それぞれ，相手の入札額を知らされずに，自分の入札額を決定する．
  - 入札額の高い方が勝つが，そのとき支払う金額は，自分の入札額ではなく，負けた方 (入札額が低い方) の入札額
  - 負けた方は支払いなし
- 最大値より大きい額を入札するのは無意味
- どこまでさげるのが良いのか

第二価格秘密入札での最適戦略

- 支払額は自分の入札額に関わらず決まる
  - 勝った場合は，相手の入札額
  - 負けた場合は，0
- 入札額を下げても支払額は減らない．
- つまり，最大値をそのまま入札するのが最適
  - これもナッシュ均衡
  - ただし，相手の行動に影響されず，最適 (支配戦略)
  - 支配戦略の組による均衡なので，支配戦略均衡と呼ぶ．

主催者の収入

- ふたつのオークションで主催者の収入は?
  - 第二価格秘密入札では，2 人目の価格しか主催者に支払われない．
  - 主催者はより儲かりそうな第一価格秘密入札方式にするのでは?
- 収入同値定理 [Vickrey, 1961] が成り立つ．
  - 第一価格入札の参加者がナッシュ均衡に従った時の主催者の期待収入 = 第二価格秘密入札の参加者が支配戦略に従った時の主催者の期待収入

ゲーム理論は何の役に立つのか?

- 様々な場面での意思決定に使える.
  - 複数の選択肢からひとつを選ぶ.
  - 自分の選択だけではなく，他者 (偶然も含む) の選択が結果に影響する.
- ゲーム理論は，自分の意思で行動する複数のプレイヤが存在する状況 ($\rightarrow$ ゲーム的状況) で，どのような結果が生じ得るかを予測する理論
- より良い社会的ルールの設計に使える.
  - メカニズムデザイン (逆ゲーム理論)

ゲームの種類

- 戦略形ゲーム (第 2 回)
  - プレイヤの戦略と利得の関係を関数を用いて記述する，最も基本的なモデル
- 展開形ゲーム (第 3 回)
  - ゲームにおける手番の系列をゲームの木を用いて記述し，ゲームの動学的構造や情報構造を定式化する．
- 繰り返しゲーム (第 4 回)
- 提携形ゲーム (第 5·6 回)
  - プレイヤの様々な提携にとって実現可能な総利得または利得配分の集合を記述し，提携行動の分析を行う．