
ゲーム理論

第7回 アドバンスドトピック (投票)

佐賀大学大学院 工学系研究科

知能情報システム学専攻

上田 俊

Email: sgrueda@cc.saga-u.ac.jp

<https://sites.google.com/view/sgrueda/in-japanese>

講義の前に...

- 11/21 (来週) は **中間試験** です.
- 講義の後半は, 先週に引き続き, 演習問題 (協力ゲーム理論) を出します.
- 講義の終了時に, 中間試験に関する注意事項を再度説明します.

社会選択理論 social choice theory

- 複数の個人の選好 (preference) を集合する方法を設計し, 形式的に分析する理論.
 - 選好集計, 投票方式, 公平分配, マッチング...etc
- 長い歴史と多くの研究者:
 - 古代ローマ元老院議員 小プリニウス
 - 13世紀カタルーニャ哲学者 ラモン・リュイ
 - 18世紀フランス数学者 ニコラ・ド・コンドルセ
 - ケネス・J・アロー (Kenneth J. Arrow, 1921/8/23-2017/2/21)
 - アローの不可能性定理 – 現代版「社会選択理論」の始まり

国際会議での昼食の飲み物

- あなたはホテルの支配人であり、ある昼食会の飲み物を（ひとつだけ）選ばなければならない。
- 昼食会の参加者は4人のオランダ人、3人のドイツ人、2人のフランス人である。
- それぞれが飲みたい飲み物は次の表の通り：

4 - オランダ人	3 - ドイツ人	2 - フランス人
ミルク	ビール	ワイン
ワイン	ワイン	ビール
ビール	ミルク	ミルク

- さて、何を用意すべきだろうか？

投票ルール

- 投票者の選好から勝者をひとつだけ選ぶ関数.
- 投票ルールの種類
 - スコアリングルール
 - コンドルセ勝者とその拡張
 - その他
- 望ましい性質
 - Resoluteness, non-imposing
 - 耐戦略性, 非独裁制

スコアリングルール

4	3	2
M	B	W
W	W	B
B	M	M

- 各選好の i 番目の候補に s_i 点を与える.
 - 与える点はすべての投票者で共通.
 - スコアベクトル $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ と呼ぶ.
 - ただし, m は候補者数, $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m$ かつ $s_1 > s_m$.
- 最も多くの点を獲得した候補が勝者となる.
- ボルダルール (Borda's rule)
 - $(m - 1, m - 2, \dots, 0)$: ワイン
- 多数決 (Plurality rule)
 - $(1, 0, \dots, 0)$: ミルク

コンドルセ勝者

4	3	2
M	B	W
W	W	B
B	M	M

- すべての候補を1対1で比較し、すべての候補に勝った候補。
 - ワイン vs. ビール 6:3 ⇒ ワインの勝ち
 - ワイン vs. ミルク 5:4 ⇒ ワインの勝ち
 - よって、コンドルセ勝者はワイン
- 選好によっては、存在しない場合がある。
- コンドルセ拡張ルール (Condorcet extensions)
 - コンドルセ勝者が存在する場合はそれが勝者になる。存在しない場合は、他の候補を勝者とする。

コンドルセ拡張ルール

4	3	2
M	B	W
W	W	B
B	M	M

- コープランドルール (Copeland's rule)
 - 1対1で比較で勝利すれば1点を得る. 引き分けであれば, 事前に決めた点 (0以上1以下, 例えば1/2) を得る. 最も多くの点を獲得した候補が勝者.
- その他のコンドルセ拡張ルール
 - Maximin
 - Dodgson's rule
 - Young's rule
 - Nanson's rule

その他のルール

4	3	2
M	B	W
W	W	B
B	M	M

- STV (single transferable vote) ルール
 - 最も第1ランクになって“いない”候補を除外する.
 - この操作をひとつの候補が残るまで繰り返す.
 - ワインが除外 ⇒ ミルクが除外 ⇒ ビールが勝利
- Bucklin's rule
 - 半分以上の投票者によって第1ランクになっている候補がある場合, それを勝者とする.
 - そうでない場合, 半分以上の投票者によって第1・2ランクになっている候補がある場合, それを勝者とする.
 - 以下繰り返し...

投票ルールまとめ

4	3	2
M	B	W
W	W	B
B	M	M

ミルク	ワイン	ビール
	ボルダ	
多数決		
	コーブランド	
		STV
	Bucklin's rule	

このニュース，憶えていますか？

- 立憲・枝野氏
「戦略的投票で、安倍1強終わらせる」
 - 2017年10月11日 朝日新聞デジタル
- ここでの「戦略的投票」とは？
 - (おそらく) 例えば，与党候補1位，野党候補2位，野党候補3位が予想される場合に，自身は野党候補3位の支持者だが，野党候補2位に投票すること。
- 投票理論での定義
 - 真の選好ではなく，偽の選好を表明すること。

投票ルールの耐戦略性

- 多数決を用いて決める.
- 3人のドイツ人がワインが一番好きだと偽った.

真の選好			偽の選好		
4	3	2	4	3	2
M	B	W	M	W	W
W	W	B	W	B	B
B	M	M	B	M	M

- 結果はミルク⇒ワインに変化する.
- ドイツ人にとっては, 正直に言うより得している.

その他の投票ルールの性質

- Resoluteness
 - 必ず、ひとつの勝者を決定する.
- Non-imposing (onto, **全射的**)
 - 勝者として選ばれない候補が存在しない.
- 非独裁性 (non-dictatorial)
 - 独裁投票者: 他者の選好に関わらず, 自分の選好の第1ランクの候補が勝者となる投票者

不可能性定理

- Gibbard-Satterthwaiteの不可能性定理
 - $|m| \geq 3$ の場合, すべての
 - Non-imposing
 - 耐戦略的
 - Resoluteness
 - な投票ルールは独裁的である。(独裁投票者が存在するルールである.)
- 紹介したルールは耐戦略性を満たさない.
 - ただし, 現実的に戦略的な投票が可能かは不明.
 - 他人の選好も知らないと, 投票戦略を選びようがない.

まとめ

■ 社会選択理論

- 古代ローマ時代から続く学問
- 社会的な決定をどのように行うか考える.

■ 投票

- 様々な投票ルールが存在する.
- 不可能性定理より, 理想的な投票ルールは存在しないことが知られている.
- 我が国の選挙制度では, 耐戦略性を満たさない投票ルールを採用している.

第3問 コア

- 問3 次のゲームについて，基本三角形でコアの条件を満たす領域を図示せよ.
 - 隣接する3つの自治体A, B, Cが共同して水源から上水道を供給するための水道管を引こうとしている：
 - 各自治体がそれぞれ独自に水道管を引く場合には，Aは1億4千万円，Bは1億6千万円，Cは2億円を必要とする.
 - AとBが協力した場合は，2億4千万円ですむ.
 - 同様に，BとCが協力した場合は，2億8千万円ですむ.
 - しかしながら，AとCが協力しても費用は削減できず，3億4千万円を必要とする.
 - 3自治体すべてが協力すれば，総額3億円の費用になる.

第3問 コア

$$\begin{aligned}v(A) &= 0, v(B) = 0, v(C) = 0, \\v(AB) &= 6, v(AC) = 0, v(BC) = 8, \\v(ABC) &= 20.\end{aligned}$$

■ 問3. 解答

□ 提携合理性の条件から、コアになる範囲を求める.

□ 提携 $\{A, B\}$ に関して,

$$x_A + x_B \geq v(\{A, B\})$$

$$20 - x_C \geq 6$$

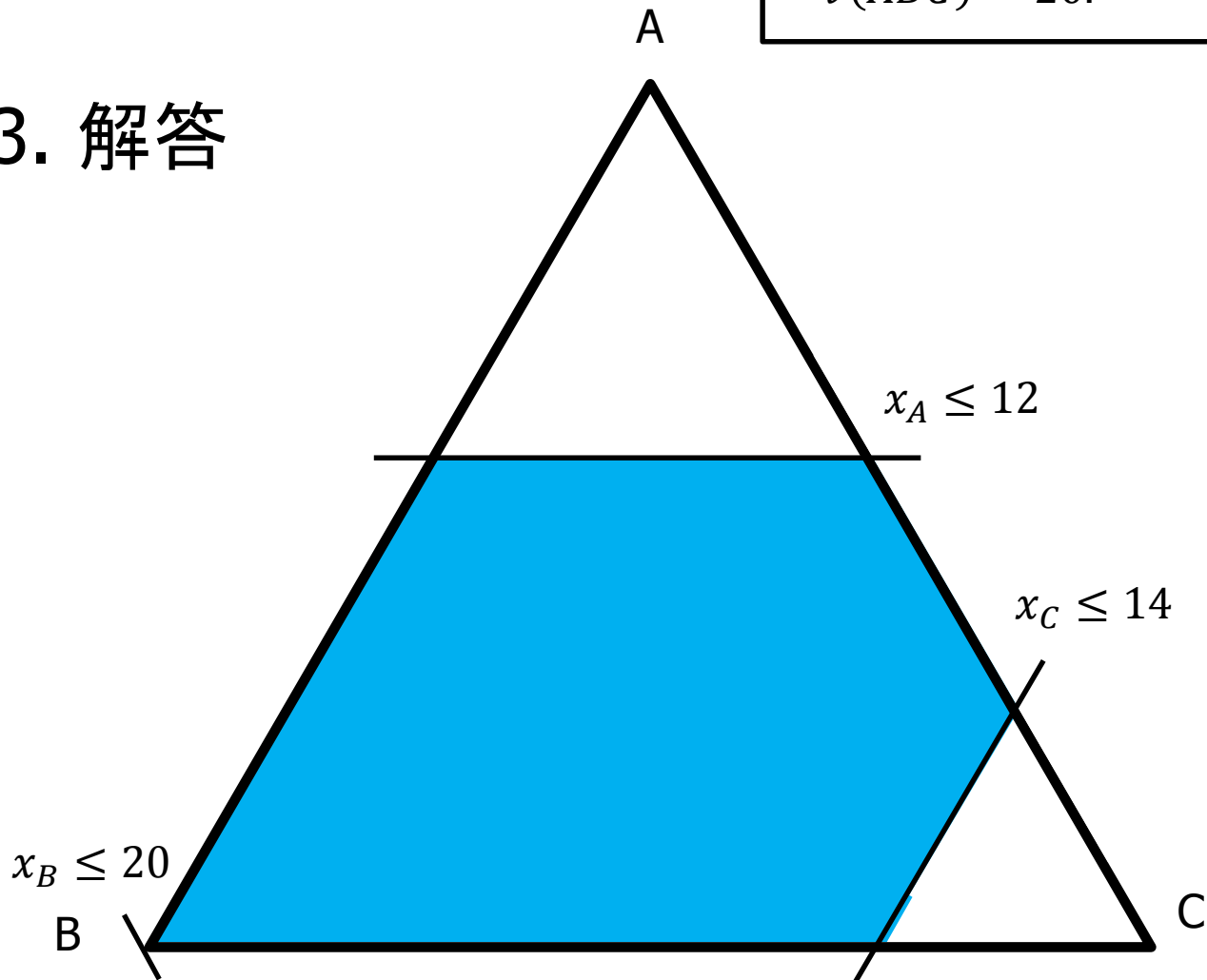
□ よって, $x_C \leq 14$ となる.

□ 同様に, $x_A \leq 12, x_B \leq 20$ となる.

第3問 コア

$$\begin{aligned}v(A) &= 0, v(B) = 0, v(C) = 0, \\v(AB) &= 6, v(AC) = 0, v(BC) = 8, \\v(ABC) &= 20.\end{aligned}$$

■ 問3. 解答



問4 シャプレイ値

$$\begin{aligned}v(A) &= 0, v(B) = 0, v(C) = 0, \\v(AB) &= 6, v(AC) = 0, v(BC) = 8, \\v(ABC) &= 20.\end{aligned}$$

- 問4 問3のゲームのシャプレイ値を求めよ.
- 問4. 解答

可能な順序	A	B	C
A → B → C	0	6	14
A → C → B	0	20	0
B → A → C	6	0	14
B → C → A	12	0	8
C → A → B	0	20	0
C → B → A	12	8	0

- シャプレイ値 $\phi = (5, 9, 6)$

中間試験について (1/2)

- 11/21 (来週) は中間試験 (ゲーム理論) です.
- 全5問を予定:
 - ナッシュ均衡, ゲーム木探索, コア, シャプレイ値
 - アドバンスドトピック (投票) よりそれぞれ1問
- 配点
 - 各10点 (部分点あり) - 計50点
- 筆記用具以外の教科書・資料の持ち込みは認めません.
 - 最適反応グラフやコアの描画に定規等を用いるのは良いです.

中間試験について (2/2)

■ 場所: 302 と 303

- 隣りどうしの席にならないように着席してください。適当に分かれて着席してください。
- ~~席の指定はありません。~~
- 学科ごとに指定します。振分けは当日指示します。

■ 諸注意

- 8:50に試験を開始できるように、5分前には着席しておいてください。
- 60分経過後は答案提出の上、退出することを認めます。
- 遅刻しても構いませんが、試験時間の延長はありません。また、60分経過後の受験は認めません。