ゲーム理論

第6回 協力ゲーム (2) – シャプレイ値

佐賀大学大学院 工学系研究科
知能情報システム学専攻
上田　俊
Email: sgrueda@cc.saga-u.ac.jp
https://sites.google.com/view/sgrueda/in-japanese

今後の予定

- …
- 第5回 (10/31) 協力ゲームI
- 第6回 (11/7・今日) 協力ゲームII
  + 中間試験練習問題I
- 第7回 (11/14) アドバンスドトピック (投票理論)
  + 中間試験練習問題II
- 第8回 (11/21) 中間試験
- 第9回以降 (11/28 ～) 確率モデル

アウトライン

- シャプレイ値
  - 限界貢献度
- シャプレイ値の特徴づけ
  - パレート最適性
  - ナルプレイヤー
  - 対称性
  - 加法性
- コアとの関係

ベンチャー企業ゲーム (おさらい)

- 大学生のA君, B君, C君は卒業後にベンチャー企業を作ろうとしている:
  - 3人が別々に会社を作ると, A君は6万円, B君は4万円, C君は2万円の日収を得る.
  - 2人が一緒に会社を作ると, A君とB君は総額で20万円の日収になる.
    - A君とC君なら, 15万円. B君とC君なら, 10万円.
  - 3人で起業すると, 総額24万円の日収になる.
- さて, 誰と一緒に起業して, どのように利益を分配するのがいいだろうか?

提携形ゲーム (おさらい)

- 提携形ゲーム (coalitional game): (N, v)
  - $N = \{1, \cdots, n\}$: プレイヤーの集合
  - $S \subseteq N$: 提携 (coalition)
  - $v: 2^N \to \mathbb{R}$: 特性関数. $v(S)$ は提携 S のメンバーが協力して得る利得を表す.
- $(N = \{A, B, C\}, v)$ の例
  - $v(A) = 6, v(B) = 4, v(C) = 2,$
    $v(AB) = 20, v(AC) = 15, v(BC) = 10,$
    $v(ABC) = 24.$

限界貢献度

$v(A) = 6, v(B) = 4, v(C) = 2,$
$v(AB) = 20, v(AC) = 15, v(BC) = 10,$
$v(ABC) = 24.$

- 提携 S に対するプレイヤー i の限界貢献度 (marginal contribution)は, $v(S) - v(S - \{i\})$ によって定義される.

可能な順序	A	B	C
A → B → C	6	14	4
A → C → B	6	9	9
B → A → C	16	4	4
B → C → A	14	4	6
C → A → B	13	9	2
C → B → A	14	8	2

シャプレイ値

$v(A) = 6, v(B) = 4, v(C) = 2,$
$v(AB) = 20, v(AC) = 15, v(BC) = 10,$
$v(ABC) = 24.$

- ゲーム (N, v) におけるプレイヤー i のシャプレイ値 (Shapley value) は,

$$\phi_i(v) = \sum_{S: i \in S \subseteq N} \frac{(|S| - 1)!\,(n - |S|)!}{n!} \{v(S) - v(S - \{i\})\}$$

  で定義される. ただし, $v(\emptyset) = 0$ とする.
- プレイヤーがランダムな順序で全体提携 N を形成するとき, プレイヤー i の提携に対する限界貢献度の期待値
- 起業ゲームの例では...
  - $\phi_A = 11.5,\ \phi_B = 8,\ \phi_C = 4.5.$

アウトライン

- シャプレイ値
  - 限界貢献度
- シャプレイ値の特徴づけ
  - パレート最適性
  - ナルプレイヤー
  - 対称性
  - 加法性
- コアとの関係

解概念の特徴づけ

- 解概念の特徴づけ (characterization)
  - ある解概念がいくつかの望ましい性質 (または公理) を満たす.
  - かつ, それらの性質を同時に満たす解概念がそれだけであること.
- 解概念の唯一性が言えるので, とても強力
- ~~「提案メカニズムの特徴づけを行った」とか一度でいいから論文で書いてみたい.~~

シャプレイ値の特徴づけ

- シャプレイ値は以下の4つの性質 (公理) で特徴づけられる:
  - パレート最適性
  - ナルプレイヤー
  - 対称性
  - 加法性
- 4性質を同時に満たす解概念はシャプレイ値のみ.
  - 証明は省略

パレート最適性

- シャプレイ値がパレート最適性を満たすとは,

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$$

が成り立つことである.

- 全体で得る利得を過不足なく分配している.
- コアの全体合理性と同じ.

ナルプレイヤー

- プレイヤー i がナルプレイヤー (Null player) であるとは，任意の提携 S に対して$v(S \cup \{i\}) = v(S)$ が成り立つときをいう.
- シャプレイ値は任意のナルプレイヤー i に対して，
$$\phi_i(v) = 0$$
となる.
- ナルプレイヤーの限界貢献度は 0.
  - 働かざるもの食うべからず.

対称性

- プレイヤー i と j が対称 (symmetric) であるとは，任意の提携 S に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ が成り立つときをいう.
- シャプレイ値は対称なプレイヤー i, j に対して，
$$\phi_i(v) = \phi_j(v)$$
となる.
- 対称なプレイヤーの限界貢献度は等しい.
  - 同一労働同一賃金

加法性

- プレイヤーの等しい提携系ゲーム $(N, v), (N, w)$ に対して，
$$\phi_i(v+w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$$
が成り立つ．
- ある提携系ゲームが独立したふたつのゲームに分解できるなら，シャプレイ値は独立なゲームが同時にプレイされることによる影響を受けない．
- シャプレイ値の特徴づけに大きく影響している．

アウトライン

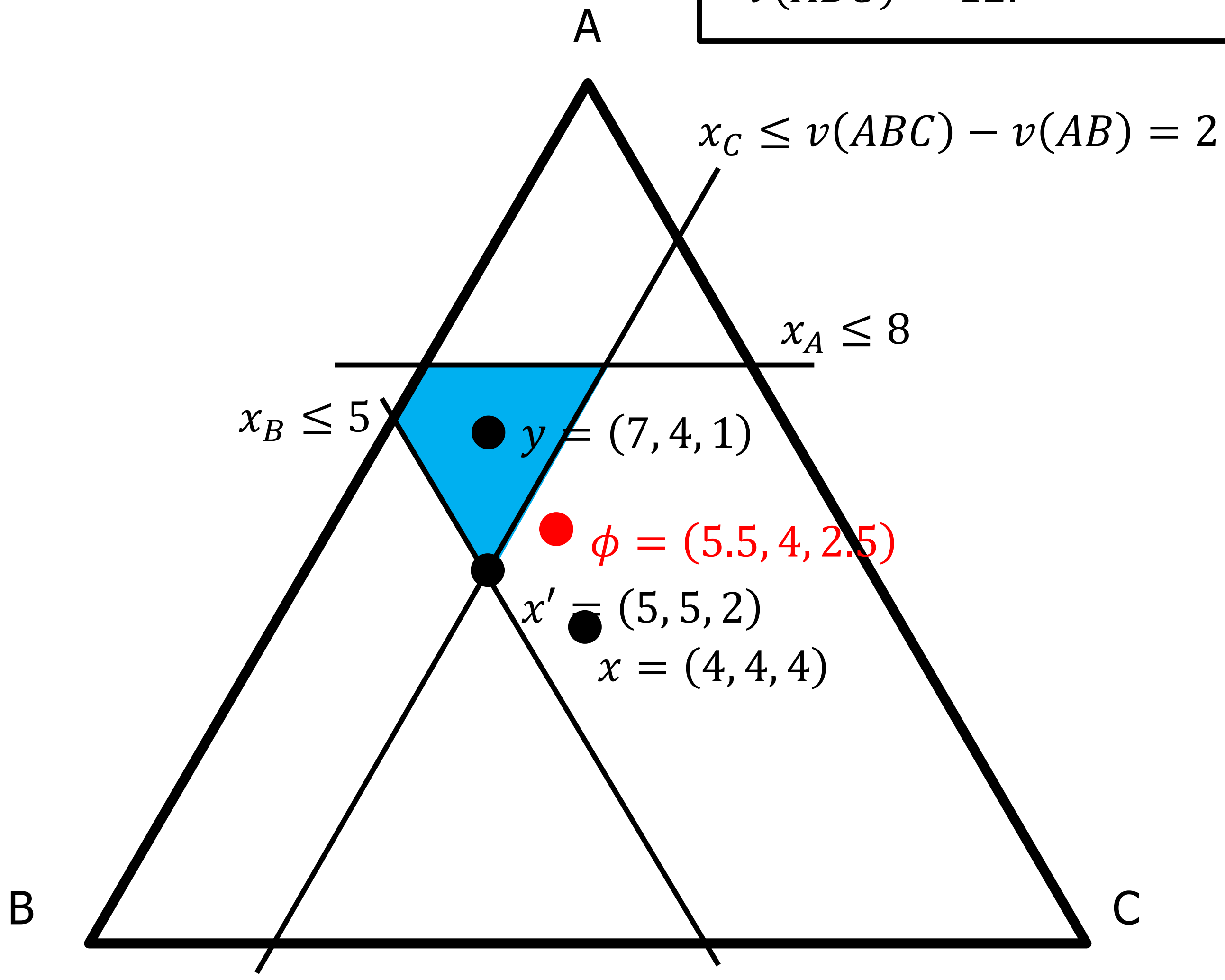
- シャプレイ値
  - 限界貢献度
- シャプレイ値の特徴づけ
  - パレート最適性
  - ナルプレイヤー
  - 対称性
  - 加法性
- コアとの関係

コアとの関係

- シャプレイ値とコア，仁との関係について，一般的なことはほとんど言えない．
- シャプレイ値がコアに含まれるか否かは，そのゲーム次第．
    - コアの領域が大きくないとシャプレイ値はコアに含まれない．
- 定理 凸ゲームのシャプレイ値はコアに含まれる．
    - 凸ゲーム: コアが必ず非空なゲーム

非空なコア

$v(A) = 0\ v(B) = 0, v(C) = 0,$
$v(AB) = 10, v(AC) = 7, v(BC) = 4,$
$v(ABC) = 12.$



まとめ

- シャプレイ値
  - 限界貢献度: あるプレイヤーが提携に参加したときの利得の増加分
  - シャプレイ値は，任意のプレイヤーの参加順序を考えて，限界貢献度の平均をとったもの
- 特徴づけ，公理化
  - シャプレイ値は，パレート最適性，ナルプレイヤー，対称性，加法性の4性質によって特徴づけなれる.
- 配分の方法として，どの解概念を用いるかはプレイヤー次第.
  - 「これを使えばよい」という決定版はない.

中間試験について

- 全5問 (内容はすべて予定)
  - 2人2行動ゲームのナッシュ均衡を求める.
  - 十分小規模な2人対戦ゲームが，先手必勝か後手必勝か求める.
  - 提携形ゲームのコアを求める.
  - 提携形ゲームのシャプレイ値を求める.
  - 投票理論に関する問題

第1問 ナッシュ均衡

- 問1 次のゲームのナッシュ均衡を求めよ.
  - 某国では，760mlの酒類の3本までの個人的な輸入が免税される．旅行者はこの輸入によって1本あたり3000円の利益を得る.
  - 旅行者は，3本の酒類を輸入する (合法行為H_0) か無申告で5本の酒類を輸入する (不法行為H_1) かの選択肢を持つとする.
  - 一方，税関は旅行者のカバンを検査する (A) か，検査しない (N) という選択肢を持つ.

第1問 ナッシュ均衡

- 問1 次のゲームのナッシュ均衡を求めよ.
  - (つづき) このゲームの利得表は右表で与えられる.
    - 不法行為が税関の検査で発覚すると, 5万円の罰金を支払わなければならない.
    - 税関の目的は第1に不法行為の阻止であり, 第2に検査費用を少なくすることである. 右図の利得表はこのことを考慮している.

税関 \ 旅行者	不法行為 H_1	合法行為 H_0
検査する A	(-1, -35)	(0, 9)
検査しない N	(-10, 15)	(10, 9)

利得表

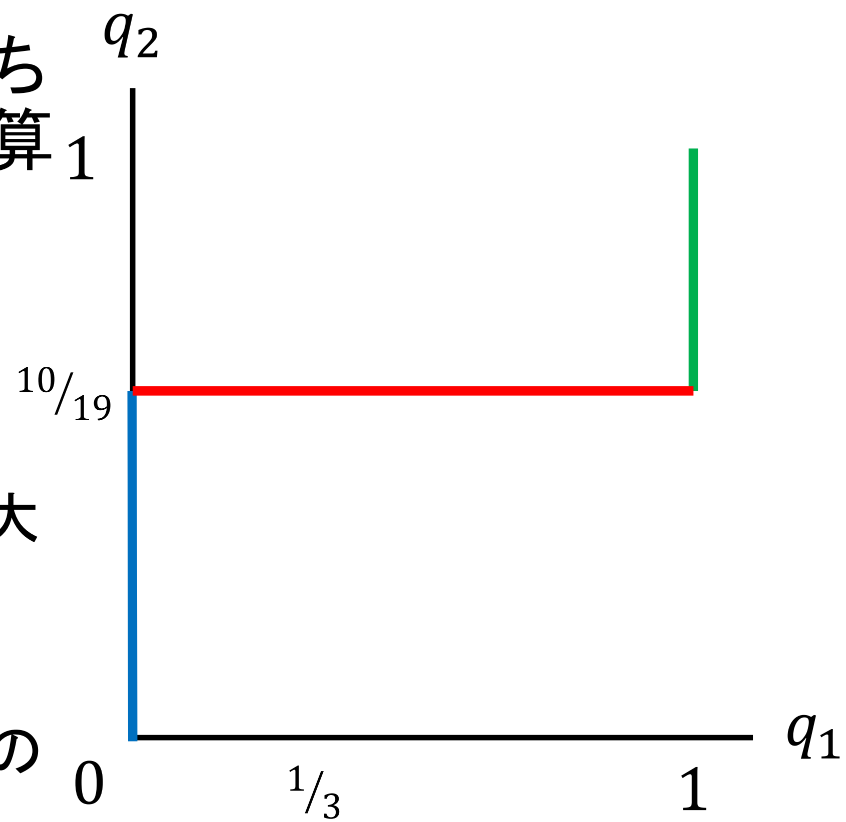
第1問 ナッシュ均衡

- 問1. 解答
  - 混合戦略の確率をおく.
    - A: q_1, N: $1 - q_1$
    - H_1: q_2, H_0: $1 - q_2$
  - 期待利得の計算 (税関)
    - Aを選択した場合: $\boxed{q_2 \times -1} + \boxed{(1-q_2) \times 0} = -q_2$
    - Nを選択した場合: $\boxed{q_2 \times -10} + \boxed{(1-q_2) \times 10} = 10-20q_2$

税関 \ 旅行者	不法行為 $H_1(q_2)$	合法行為 $H_0(1-q_2)$
検査する $A\ (q_1)$	(-1, -35)	(0, 9)
検査しない $N\ (1-q_1)$	(-10, 15)	(10, 9)

第1問 ナッシュ均衡

- 問1. 解答
  - 期待利得が等しくなる (どちらを選んでも同じ) 時を計算
    - $-q_2 = 10 - 20q_2$
      $19q_2 = 10$
      $\boxed{q_2 = 10/19}$
  - $q_2 > 10/19$の時は?
    - Aの期待利得 ($-q_2$) の方が大きくなるので, $\boxed{q_1=1}$
  - $q_2 < 10/19$の時は?
    - Nの期待利得 ($10 - 20q_2$) の方が大きくなるので, $\boxed{q_1=0}$



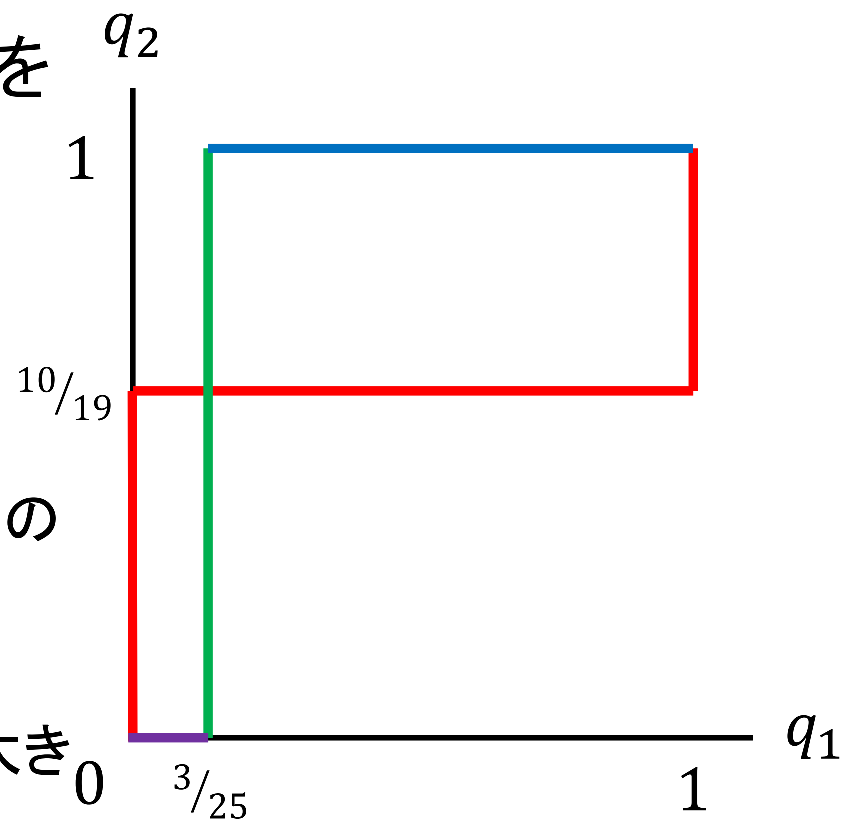
第1問 ナッシュ均衡

- 問1. 解答
  - 期待利得の計算 (旅行者)
    - H_1を選択した場合:
      $\boxed{q_1 \times -35} + \boxed{(1-q_1) \times 15}$
      $= -50q_1 + 15$
    - H_0を選択した場合:
      $\boxed{q_1 \times 9} + \boxed{(1-q_1) \times 9} = 9$

税関 \ 旅行者	不法行為 $H_1(q_2)$	合法行為 $H_0(1-q_2)$
検査する A (q_1)	(-1, $\boxed{-35}$)	(0, $\boxed{9}$)
検査しない N ($1-q_1$)	(-10, $\boxed{15}$)	(10, $\boxed{9}$)

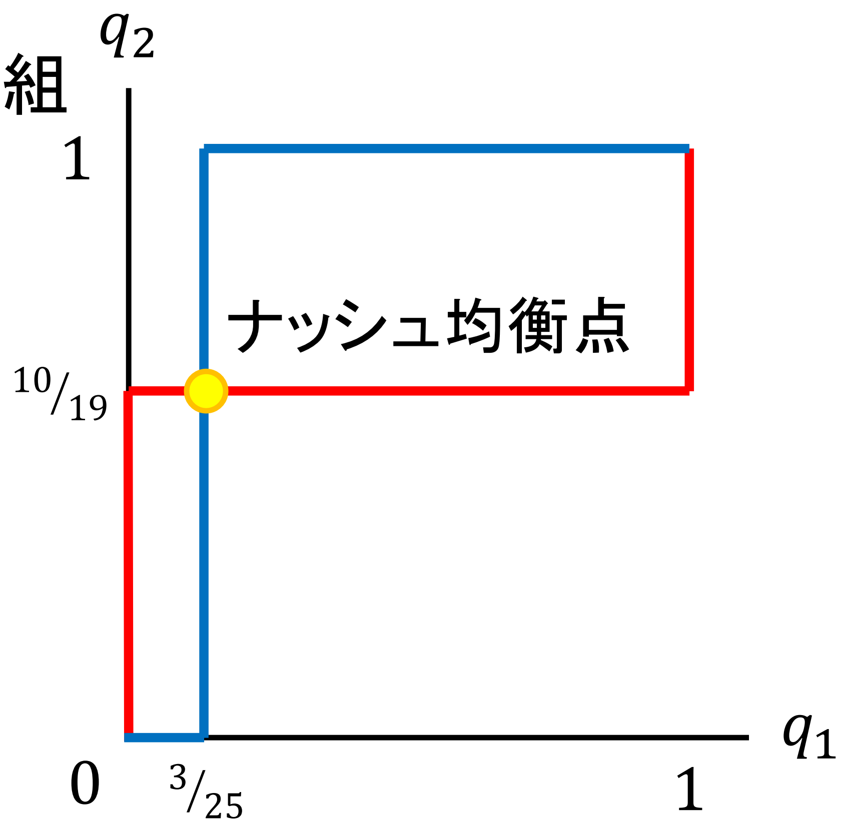
第1問 ナッシュ均衡

- 問1. 解答
  - 期待利得が等しくなるときを計算
    - $-50q_1 + 15 = 9$
      $50q_1 = 6$
      $\boxed{q_1 = 3/25}$
  - $q_1 > 3/25$の時は?
    - H_1の期待利得 $(-50q_1+15)$ の方が大きくなるので, $\boxed{q_2=1}$
  - $q_1 < 3/25$の時は?
    - H_0の期待利得 (9) の方が大きくなるので, $\boxed{q_2=0}$



第1問 ナッシュ均衡

- 問1. 解答
  - ナッシュ均衡となる戦略の組は最適反応グラフの交点
  - 税関の戦略
    - 検査するA: 3/25
    - 検査しないN: 22/25
  - 旅行者の戦略
    - 不法行為H_1: 10/19
    - 合法行為H_0: 9/19

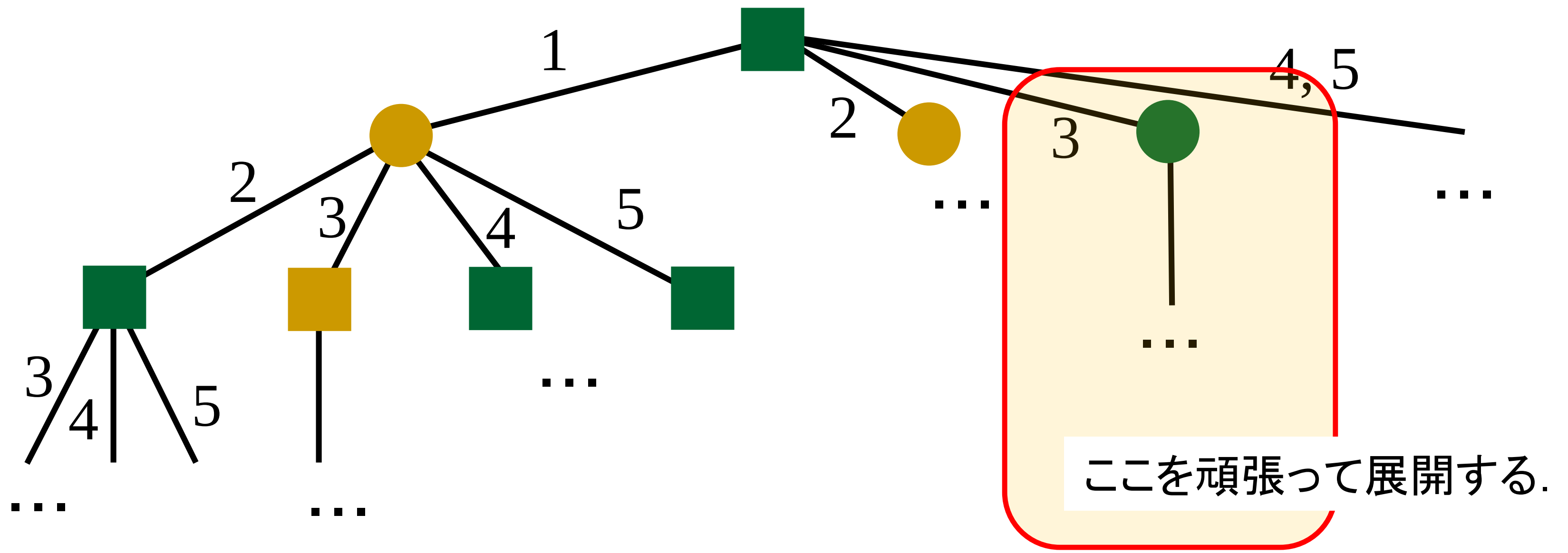


第2問 ゲーム木探索

- 問2. 以下のゲームは先手必勝である．必勝となる先手の最初の手とその根拠を示せ．
  - 2人が交互に{1, 2, 3, 4, 5}のいづれかを言う．
  - 数を言う順番は任意で，相手の言った数とは無関係で良い．
  - 各数は一度しか言えない．すでに自分もしくは相手が言った数を再び言うことはできない．
  - すべての数が言われた時点 (自分が3個，相手が2個) でゲームは終了する．
  - 先手の言った数の合計が3の倍数なら，先手の勝ち．それ以外なら，後手の勝ち．

第2問 ゲーム木探索

- 問2. 解答
  - 方法1: ゲーム木を書く.



  - 「3」を言うと必勝

第2問 ゲーム木探索

- 問2. 解答
  - 方法2: 少し頭をひねって考える.
    - 3の剰余で分類する: {3}, {1, 4}, {2, 5}
    - 最初に, 「3」という.
    - 以後は, 相手の数と同じグループの数を言う.
    - 必ず, 3の倍数になる. (3+1+2, 3+1+5, 3+4+2, 3+4+5)
  - 注意: 試験では, 必勝の手だけでなく, その根拠も示すこと. 根拠が間違っている場合は減点.